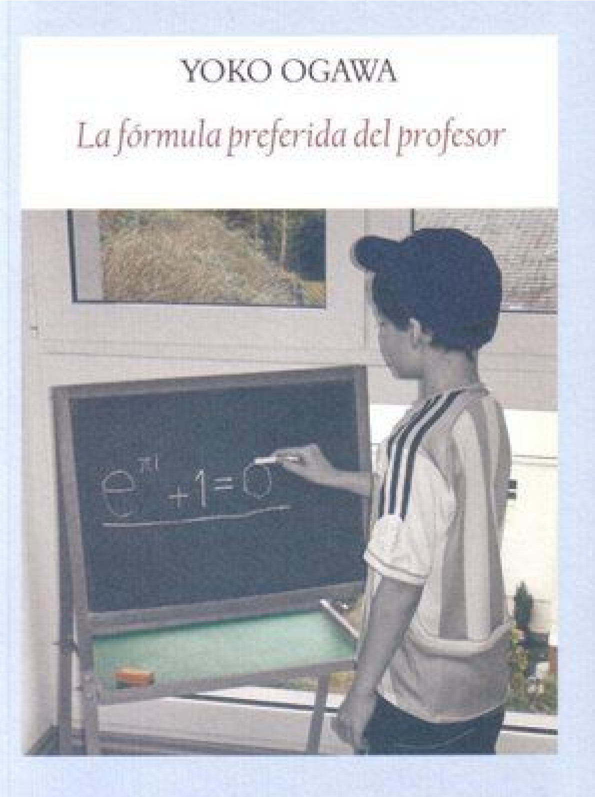
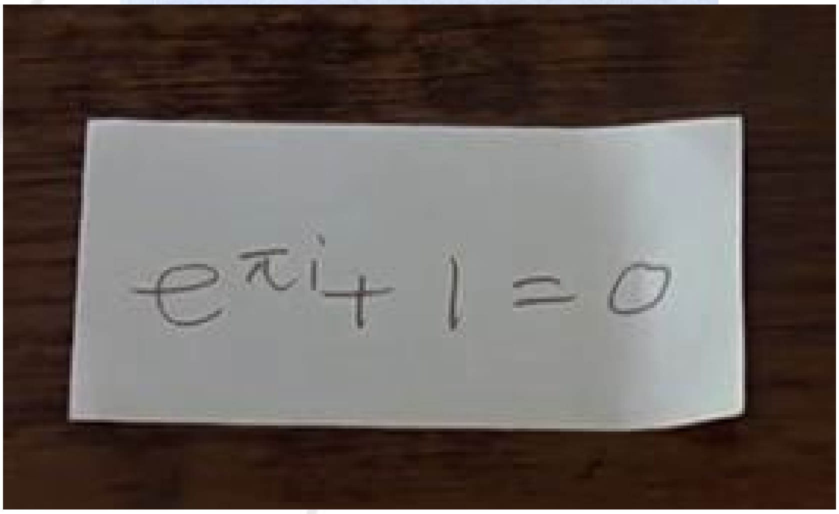
La fórmula preferida del profesor





Índice de contenido

Hakase no aishita sûshiki
The Professor and his beloved equation (English title)

DATOS TÉCNICOS
Director: Takashi Koizumi
Guionista: Takashi Koizumi basado en la novela de Yoko Ogawa
Año: 2006
Duración: 1 h 57 min
Fecha de estreno: 21 de enero de 2006 (Japón)
Intérpretes: Akira Terao (Profesor), Eri Fukatsu (Kyoko), Takanari Saito (Root – joven), Hidetaka Yoshioka (Root), Ruriko Asaoka (Cuñada del Profesor), Hisashi Igawa (Agente de la compañía)

Argumento

«Una historia de amor, amistad y transmisión del saber...»

Se nos cuenta delicadamente la historia de una madre soltera que entra a trabajar como asistenta en casa de un viejo y huraño profesor de matemáticas que perdió la memoria en un accidente de coche (mejor dicho, la autonomía de su memoria, que sólo le dura 80 minutos). Apasionado por los números, el profesor se irá encariñando con la asistenta y su hijo de 10 años, al que bautiza «Root» («Raíz Cuadrada» en inglés) y con quien comparte la pasión por el béisbol, hasta que se fragua entre ellos una verdadera historia de amor, amistad y transmisión del saber, no sólo matemático... Como dice en su *postfacio* el profesor León González Sotos, «asistimos al emocionado ajetreo, de venerable filiación platónica, entre la anónima doméstica, el también —¿innombrable?— Profesor y el pupilo Root. Entre idas y venidas, tareas caseras y cuidados piadosos a su muy especial cliente, éste va desvelando las arcanas relaciones numéricas que los datos cotidianos más anodinos pueden encerrar.»

http://www.lecturalia.com/libro/18445/la-formula-preferida-del-profesor

La autora

Yoko Ogawa nace en Okayama en 1962. Estudia en la Universidad Waseda de Tokyo. En 1986 inicia una carrera de escritora, inspirada por sus lecturas de los clásicos nipones, "*El diario de Ana Frank*" y las obras de Kenzaburo Oé. Ya con su primera novela, "**Cuando la mariposa se descompone**", obtiene en 1988 el prestigioso Premio Kaien, y desde entonces su fama no ha hecho más que crecer en el extranjero. En 1991, logra el gran premio Akutagawa por "**El embarazo de mi hermana**", que se convierte inmediatamente en un *best–seller* en su país.

A partir de entonces todas sus obras son grandes éxitos de crítica y de público en Japón, donde es indiscutiblemente el autor, en este caso autora, de más ventas. Muchas de sus obras se han traducido a las principales lenguas occidentales. En 2003 publica "**La fórmula preferida del profesor**", que obtiene varios premios (el Premio *Yomiuri*, el Premio de las Librerías Japonesas y el de la Sociedad Nacional de Matemáticas "*Por haber mostrado la belleza de esta disciplina*"). A raíz del éxito de la novela y de su adaptación al cine, a la radio y al cómic, en 2006 coescribe con el matemático Masahiko Fujiwara Una introducción a las matemáticas más elegantes. Actualmente vive con su familia en la antigua ciudad mercantil de Kurashiki y se dedica exclusivamente a la literatura.

El director

Takashi Koizumi nació el 6 de Noviembre de 1944 en Mito (Japón). Ha trabajado como ayudante de Akira Kurosawa en películas como **Dreams** (1990), **Ran** (1985) y **Kagemusha** (1980). Su filmografía se compone de 5 títulos: **Best Wishes for Tomorrow** (2007), **The professor and his beloved equation** (2006), **Lettter from the Mountain** (2002), **After the rain** (1999) y **Vietnam** (1969).

El guión de *After The rain* es de Kurosawa, rodada un año después de su muerte como homenaje póstumo. La visualización de ésta, junto con **The professor ...** nos permiten indicar algunas características del cine de Takashi Koizumi. El paisaje y la fotografía de la naturaleza son una parte im-

portante de sus obras, integrándose con sus personajes que en ambos casos conviven con un entorno natural respetado y no invadido por la mano humana. Los personajes femeninos admiten de forma resignada su existencia, a veces supeditada a un marido o al cuidado de su hijo por parte de madre soltera. Los protagonistas masculinos son educados, tratando de respetar a los demás, siendo en general bondadosos. No obstante, el *ronin* no deja de defenderse cuando es atacado por un grupo de enemigos. El mundo que refleja el director está lleno de serenidad y belleza mezclada con mucha melancolía.
Para el público juvenil se trata de un cine muy lento, con escasa acción. Nuestro amigo Homer Simpson entonaría rápidamente su famoso "¡*me aburro*!", pero aporta una visión de la realidad diferente de la occidental, con elementos muy valiosos para nuestro mundo educativo: respeto a los mayores (¡incluidos los profesores!), el valor del silencio o el respeto a la naturaleza.

Justificación de la elección de esta película

Al hilo del reciente descubrimiento de los primos de Mersenne 45º y 46º se desarrollarán ciertas actividades relativas a la Teoría de Números, haciendo énfasis también en el uso de los logaritmos, del número *e* y de las aproximaciones.
Por otro lado, es interesante ver cómo son las aulas, las clases, el alumnado, ... en otros países, en este caso Japón, así como conocer otro tipo de cine, con su propio ritmo, fotografía, uso de las pausas, etcétera.

Nivel curricular

Se proponen temas variados que pueden utilizarse tanto en la E.S.O. (cualquier curso) como en Bachillerato. Desde otro punto de vista, intentamos hacer una reflexión sobre nuestro papel como docentes, nuestras motivaciones y la forma en que vemos a nuestros alumnos y alumnas (y ellos/as nos ven a nosotros/as).

Objetivos didácticos generales

En esta película se introducen conceptos que permiten trabajar:

1. Aspectos básicos pero de actualidad sobre Teoría de números:
   1. Números primos
   2. Divisibilidad
   3. Tipos de números
   4. Origen histórico
   5. Los números "especiales": π, e, i
2. Factorial y Logaritmos.
3. Uso de las Nuevas Tecnologías:
   1. Búsqueda de información en *internet*:
      - Wikipedia y Wolfram Mathworld.
      - WebQuest
   2. Utilidad del uso de fórmulas de aproximación.
   3. Empleo de la hoja de cálculo.
4. Resolución de problemas
5. Multiculturalidad y lenguaje matemático

Metodología

Dependiendo del grupo con el que se esté trabajando, puede ser aconsejable visualizar únicamente los segmentos de película indicados. La proyección completa presenta varios inconvenientes: sonido en japonés con subtítulos en español, la parte final casi no aporta contenidos matemáticos y para los interesados podría sugerirse que la vean fuera del horario lectivo.
En caso de visionarla íntegra, puede ser interesante proyectarla sobre una pizarra blanca e ir pausando el vídeo en aquellos puntos interesantes para aprovechar la escena imagen fija en nuestra explicación. Por ejemplo, los carteles que Raíz va colocando en "su" pizarra cuando explica el factorial permiten escribir el signo "x" entre los números, ayudando a nuestra explicación complementaria.
Otra alternativa es detener las escenas cuando Raíz o el profesor hacen preguntas al aula o a la asistenta, respectivamente, y ver si nuestros alumnos/as son capaces de responderles. Esto puede potenciar la implicación del alumnado en la película y reducir la sensación de lejanía que acarrea la diferencia de idioma.

Puntos “calientes” del episodio

OBJETIVOS DIDÁCTICOS CONCRETOS	TIEMPO
Lenguaje Matemático Aunque está presente en toda la película, destaca en lo instantes siguientes	00:00:30 – 00:01:00 00:13:20 – 00:13:35 00:15:10 – 00:15:30 00:18:05 – 00:19:00
Factoriales	00:09:30 – 00:10:00 00:19:15 – 00:19:45 01:23:30 – 01:23:45 01:39:30 – 01:39:40
Números primos y factorización	00:08:45 – 00:10:30 00:11:50 – 00:13:00 01:26:30 – 01:26:50
La belleza de una demostración	00:20:02 – 00:22:35
Números amigos	00:20:45 – 00:28:00 00:29:00 – 00:29:50
Historia y origen de los números	00:28:00 – 00:29:50
Unidad imaginaria	00:36:00 – 00:39:00
Semejanza entre Matemáticas y Agricultura	00:48:00 – 00:48:30
Resolución de problemas	00:50:00 – 00:52:10
Números perfectos	00:52:35 – 00:55:25
Abstracción, concepto de recta y segmento	01:00:00 – 01:02:50
La unidad y su definición	01:06:15 – 01:07:45
Matemáticas en la vida cotidiana – Códigos secretos	01:23:45 – 01:24:40
La expresión de Euler y su explicación	01:32:55 – 01:34:00 01:34:35 – 01:38:10

A lo largo de la película también se observa el comportamiento de los japoneses en el aula y en el trato a otras personas en función de su cargo, edad, ... Puede utilizarse como base para tratar:

1. La multiculturalidad
2. El respeto

Temporalización

La temporalización adecuada para esta película depende de si se realiza el visionado completo o no. Si se visiona completa, debe considerarse la opción de ir pausando la película en cada momento “crítico”, es decir, cuando se muestra un tema interesante (ver tabla anterior).
De este modo, no nos es posible dar una temporalización “universal”, sino que ésta dependerá de qué actividades y en qué forma se proyecte la película en el aula.
Por otro lado, y al igual que con Alicia en el País de las Maravillas, se puede coordinar la actividad con el Departamento de Lengua y Literatura, haciendo la lectura del libro. Esto permitiría analizar la fidelidad con la que “el cine” adapta las obras literarias, con un debate acerca de cuál de las formas de arte es “mejor”.

Puntos de interés antes del visionado de la película

Nos parece de suma importancia que el alumnado sepa de antemano que la película no ha sido doblada al castellano. Esto supone que el visionado ha de realizarse con el “añadido”, no siempre bien aceptado, de la lectura de subtítulos. Increíblemente, hemos experimentado con alumnos de 1º de ESO y no hemos recibido ninguna queja. La parte positiva es que el film es suficientemente lento como para que cualquier alumno tenga tiempo a leer los citados subtítulos sin mayor problema. Quizás podría considerarse como una actividad dentro del Plan de Lectura que se está llevando a cabo en la actualidad en todos los centros.

Destacamos que el cine japonés, en su mayoría, tiene un ritmo lento y con abundancia de pausas. Esto es enormemente positivo a la hora de parar la proyección y proponer al alumno la realización de algunas de las actividades que adjuntamos o las que el docente que imparte la clase considere oportuno. La mayoría de las actividades que proponemos encajan perfectamente en esos períodos “*stand-by*” que aparecen. Pensamos que, en este caso, no sólo somos nosotros los que motivamos a nuestros alumnos, sino que es un “profesor” aún más *especial* el que nos estará ayudando a motivarlos.

Aspectos a comentar tras el visionado de la película

Aprovechando la nacionalidad de la película y su exotismo para nuestros alumnos, nos parece muy apropiado hablarles de los distintos Sistemas de Numeración que hay en el mundo. Proponemos que se les lleve, de forma guiada, desde los primeros Sistemas de Numeración conocidos hasta los que utilizamos en la actualidad, extendiéndonos a los que para nuestra cultura son más “extraños”. Para ello desarrollamos una actividad fabulosa sobre Sistemas de Numeración, con suficiente material para una exposición clara y muy enriquecedora.

Una de las características más destacables de la película es su gran componente emocional. Nos hace meditar sobre puntos muy básicos en el desarrollo de nuestra actividad docente en los que, a veces por inercia, no nos paramos a pensar:

- ¿Cómo perciben las Matemáticas nuestros a alumnos y alumnas?
- ¿Cómo nos ven a nosotros?
- ¿Cómo nos vemos a nosotros/as mismos/as como docentes?
- ¿En qué podemos mejorar?
- …

Hemos extraído, tras cuidadosa recogida de datos en la red, una serie de rasgos que ex–alumnos de diferentes partes del mundo consideran imprescindibles en el perfil de un profesor. Esperamos que con esta aportación enriquezcamos nuestra competencia diaria y, con ello, nuestras vidas y las de nuestros alumnos.

Sugerencias didácticas

La película hace numerosas referencias a la Teoría de Números. Nos permite hablar de números primos, números amigos, números perfectos, números triangulares, … Las explicaciones del “profesor” son claras y deliciosamente sencillas. Sería muy recomendable que el profesor viera el *film* antes del visionado conjunto y programara su proyección para desarrollar temas como, por ejemplo, divisibilidad.

La aparición protagonista del número *e* en la película nos invita a introducírselo a nuestros alumnos de un modo ameno e incluso estelar.

Es el momento de perder el miedo a los problemas de Matemáticas. Todos hemos oído con frecuencia a nuestros alumnos frases como: “A mí los problemas se me dan mal” o “No profe, en el examen no pongas problemas”. Creemos apropiado dedicarle a este pequeño-gran trauma un poco de tiempo y, en lo posible, ir curándolo. Con este fin, sugerimos plantear a los alumnos la siguiente preguntas antes del visionado:

- ¿Se te da bien resolver problemas?
- ¿Qué pasos sigues cuando tienes qué resolver un problema?
- ¿Lees detenidamente el enunciado?
- ¿Extraes los datos más relevantes?
- ¿Interrelacionas los datos que aparecen?
- ¿Eres ordenado en tu desarrollo?
- ¿Expresas las soluciones con claridad?

Esto nos permitirá, con ayuda de la película, corregir vicios y miedos que aparecen en la resolución de problemas, y que han sido adquiridos durante largos años. A “Raíz” de la película, proponemos una actividad preciosa sobre las pautas más recomendables para enfrentarnos a la resolución de un problema. Esta actividad incluye aspectos que no siempre tenemos en cuenta, como puede ser la importancia de la entonación en la lectura para la adecuada comprensión de un enunciado y la posterior resolución del problema.

Actividad 1: Teorema de los números primos

Introducción

El profesor expone que el número de primos menores que un billón es 5,761,455. Para encontrar este valor deberíamos determinar todos y cada uno de los primos que hay en este intervalo. Sin embargo, el famoso matemático Carl F. Gauss estableció la hipótesis posteriormente demostrada de que el número de primos menores que un número *n*, denotado como $\pi(n)$, es aproximadamente igual a:

$$L(n)=\frac{n}{\ln n}$$

Material necesario

Preferiblemente se desarrollará en un aula con ordenadores y conexión a *internet*.

Desarrollo

1. Rellena la tabla.
   a) Busca información en *internet* para completar la primera columna
   b) Usa una hoja de cálculo para el resto de la tabla.

n	$\pi(n)$	$L(n)=\frac{n}{\ln n}$	$\pi(n)-L(n)$
100			
1000			
10^6			
10^9			
10^{12}			

2. Verifica si la afirmación del profesor coincide con los cálculos realizados

Guía para la resolución

En primer lugar hay que hacer ver la dificultad que entraña el cálculo directo de la función $\pi(n)$. A continuación se explica la hipótesis de Gauss, más adelante conocida como el teorema de los números primos. El siguiente paso es rellenar la tabla. Para completar la primera columna se tiene que buscar la información en *internet* y para el resto de la tabla se tiene que usar una hoja de cálculo. Por último, se tiene que verificar si la afirmación del profesor coincide con los cálculos realizados, para comentar el problema que supone el diferente significado de billón en Europa y en EE.UU.

Actividad 2: Factorial de un número.

Introducción

El profesor le explica a su asistenta la definición de factorial. Queremos hacer ver que el factorial de un número crece muy rápidamente, y pronto genera un número muy grande.

Material necesario

Preferiblemente se desarrollará en un aula con ordenadores y conexión a *internet*.

Desarrollo

Para observar la comprensión de la definición de factorial se planteará el ejercicio:

1. El número e, la base de los logaritmos naturales, se puede calcular utilizando la expresión:

$$e=1+\frac{1}{1\,!}+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\ldots$$

   1. Explica el significado de los puntos suspensivos.
   2. Con una hoja de cálculo, determina el error relativo que se produce al aproximar e con 25 sumandos.
   3. ¿Cuántos sumandos son necesarios para obtener el número e con 8 decimales correctos?

2. Con una hoja de cálculo sólo se puede calcular directamente el factorial de un número menor o igual que 170. La fórmula para el número de dígitos en base 10 que tiene un número n es:

$$1+\lfloor \log n \rfloor$$

siendo $\lfloor \log n \rfloor$ la parte entera del logaritmo de n. Utilizando la igualdad:

$$\log n\,! = \log 1+\log 2+\log 3+\ldots+\log(n-1)+\log n$$

y la hoja de cálculo, determinar el número de dígitos del factorial de 1000

3. Completar la tabla:

n	*n*!	$\sqrt{2\,\pi\,n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
75		
100		
150		

4. Con una hoja de cálculo determinar el error relativo cometido al aproximar el factorial de *n* por la expresión $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ en los tres casos del ejercicio anterior.
5. Completa la tabla:

n	$n!$	$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$	Dígitos de $n!$
10			
50			
75			
100			
150			
200			

Con la hoja de cálculo sólo se puede calcular directamente el factorial de un número menor o igual que 170. Los alumnos tienen que encontrar en internet una fórmula para el número de dígitos en base 10 de un número:

$$1+\lfloor \log n \rfloor$$

y aplicarla en el caso de los factoriales. Deberán ser capaces de calcular con ayuda de la hoja de cálculo

$$\log n! = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log(n-1) + \log n$$

También se sugerirá el empleo de la aproximación de Stirling

$$\log n! \approx n \log n - n$$

Actividad 3: Números perfectos.

Introducción

La asistenta, a partir de la idea de números amigos, le cuenta al profesor su descubrimiento personal de que el número 28 es igual a la suma de sus divisores propios.

Material necesario

Preferiblemente se desarrollará en un aula con ordenadores y conexión a *internet*.

Desarrollo

Se sugerirá la búsqueda de información en la Wikipedia sobre los números perfectos. Utilizando la hoja de cálculo **buscador de naturales** que se encuentra en

http://www.hojamat.es/sindecimales/aritmetica/iniaritmetica.htm

se localizarán los primeros números perfectos.

1. Indica la condición para que un número par $n=2^{p-1}(2^p-1)$ sea perfecto.
2. ¿Cuándo un número se llama primo de Mersenne?
3. Utilizando la fórmula ya conocida, determina el número de dígitos de los dos números:

$$2^{37,156,667}-1 \text{ y } 2^{43,112,609}-1$$

4. Indica la condición para que un número impar sea perfecto.
5. Escribe las primeras parejas de números amigos, su descubridor y el año en que se produjo.

También se comentará el reciente descubrimiento del 45º primo de Mersenne y su relación con los números perfectos pares:

$$n=2^{p-1}(2^p-1)$$

Para que un número par sea perfecto, 2^p-1 tiene que ser un número primo, que se llama primo de Mersenne. En la página www.mersenne.org se describe la búsqueda de estos primos y los premios que otorga la *Elecronic Frontier Foundation* a los descubridores de primos gigantescos.

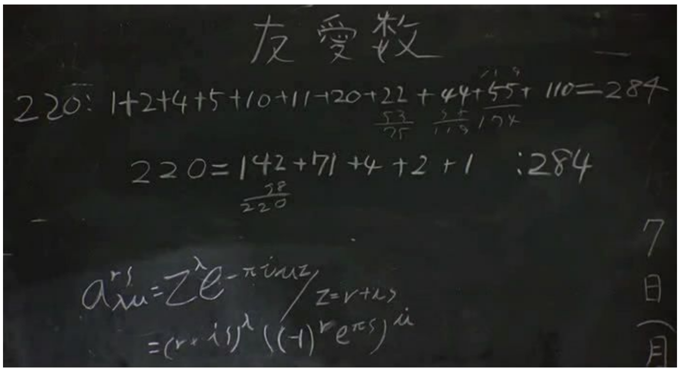
Actividad 4: Números amigos

Vamos a reproducir la escena ya que nos muestra, de una forma muy didáctica, dentro del argumento de la propia película, qué son los números amigos.

Escena: 0:21:25 - 0:29:50

El profesor trata de enseñarle la belleza de las Matemáticas a Kyoko, así que le pregunta por su cumpleaños:

- El 20 de febrero –responde.
- 220 –remarca el profesor– ¡Qué número tan encantador! Echa un vistazo a esto –enseñándole un reloj que le han dado en la Universidad– Gané el Premio Presidente por mi trabajo sobre la teoría trascendental de los números –a la vez que le muestra el reverso del mismo.
- Premio Presidente número 284 –lee Kyoko– ¿Quiere decir que usted fue el 284 que lo recibió?
- Supongo. La cuestión es 220 y 284 –así que borra el encerado y escribe ambos números– ¿Qué opinas?
  Kyoko no sabe por dónde salir, ni lo que el profesor pretende con la pregunta, por lo que le habla del número de dígitos que tienen, de la dificultad de distinguir 220 gramos de 280 en la carnicería…
- Comprende intuitivamente los números desde el corazón –le comenta el profesor– ¿Sabes lo que es un divisor?
- Sí, eso creo. Recuerdo haberlos estudiado.



El profesor empieza a escribir todos los divisores de 220, exceptuando el propio número, ante la sorpresa de la chica, por realizarlos mentalmente y con gran facilidad:

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110

A continuación y de la misma manera, los divisores de 284:

1, 2, 4, 71, 142

- ¡Súmalos! –pide el profesor– ¡Tómate tu tiempo! –y Kyoko empieza a sumar, los primeros mentalmente y los últimos con el algoritmo de la suma.
- ¡Ya está! –dice satisfecha, preocupada por hacer las sumas correctamente y sin fijarse e interpretar los resultados.
- ¡Contempla… esta hermosa cadena de números! Suma todos los divisores de 284 y obtienes 220. Suma todos los divisores de 220 y obtienes 284 –ante la sorpresa de Kyoko que mira incrédula– ¡SON NÚMEROS AMIGOS! –y escribe su nombre en la pizarra, por supuesto, en japonés– Tales parejas son muy raras. Incluso Fermat y Descartes descubrieron un par cada uno. Son números vinculados por la voluntad de Dios.
- ¿No es hermoso? Tu cumpleaños y el número grabado en mi reloj...

A continuación se vuelve al presente y vemos a Raíz explicando los números amigos a sus alumnos:

- La primera persona que descubrió los números amigos fue Pitágoras –explica Raíz en el encerado–. Pitágoras hizo una importante declaración: *Los números son la esencia de las cosas*. En el siglo VI antes de Cristo.

Y siguen comentando cosas acerca del origen de los números, en general, para volver al tema de los números amigos.

- ¿Os importaría descubrir alguna otra pareja de números amigos? –ante el silencio de la clase– Por cierto, los siguientes números amigos más cercanos son 1184 y 1210. ¡Cuatro dígitos! Esta pareja, en 1866, Paganini, un italiano, Nicolo Paganini descubrió esta pareja. Podéis creerme cuando os digo que Paganini tenía 16 años.
- ¡En el instituto! –dice un alumno.
- Lo importante es pensar que lo hizo sin darse por vencido.

Comentario

A través de la película, aderezado con una serie de pinceladas históricas, descubrimos este tipo de números. Estos dos números, el 220 y 284, fueron conocidos ya por los pitagóricos y se consideraban como símbolos de amistad. Los comentaristas de las Escrituras localizaron el número 220 en el número de cabras que Jacob dio a Esaú. Sabia elección, hicieron notar, porque siendo 220 uno de los integrantes del par amigo, era expresión del afecto que Jacob sentía por Esaú.

Actividad con calculadora

17296 y 18416 es el siguiente par de números amigos, descubierto en el siglo XIII, siglos de luces y sombras en cuanto a las matemáticas, y redescubierto por Fermat en 1636. Fermat trabajó el tema y estableció que para cualquier $n > 1$, a y b serán amigos siendo:

$$a = 2^n \cdot p \cdot q \qquad \text{y} \qquad b = 2^n \cdot r$$

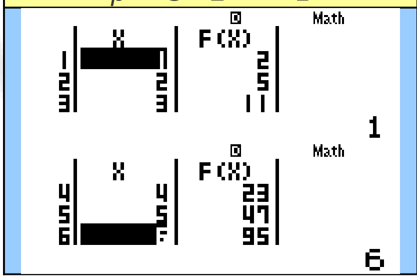
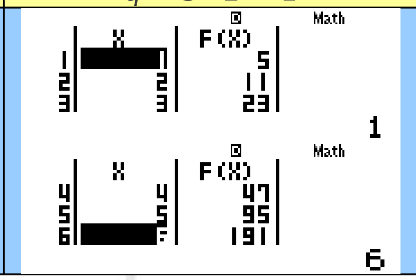
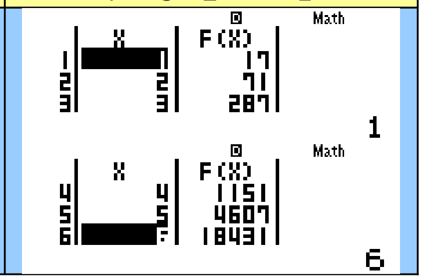
siempre y cuando p, q y r sean primos, de forma que...

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$
$$q = 3 \cdot 2^n - 1$$
$$r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

No todos los números amigos se obtienen con esta fórmula, pero sí son amigos todos los números que se obtienen con la fórmula.

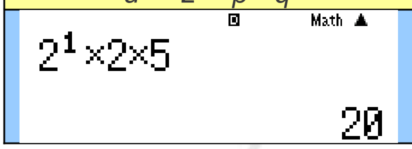
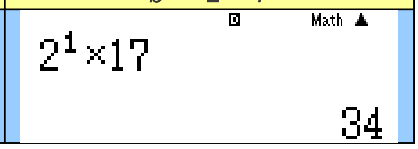
Vamos a realizar esta actividad con la ayuda de una herramienta de fácil uso y muy accesible como lo es una calculadora de la gama ES de CASIO.

Hagamos unas tablas de valores para $n = 1$ hasta $n = 6$ con las funciones señaladas arriba

$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$	$q = 3 \cdot 2^n - 1$	$r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$
		

Caso $n = 1$

Para $n = 1$ la terna $\{p, q, r\}$ es $\{2, 5, 17\}$, y vemos que los 3 son primos, por lo tanto definimos las dos nuevas variables a y b como números amigos y miramos su valor para x = 1:

$a = 2^n \cdot p \cdot q$	$b = 2^n \cdot r$
	

¿Serán verdaderamente 20 y 34 amigos?

Divisores de 34, exceptuándolo a él:
{1, 2, 17}
1 + 2 + 17 = 20

¡Vamos bien!

Divisores de 20, exceptuándolo a él:
{1, 2, 4, 5, 10}
1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22

¡No son amigos!

¿Qué falla?

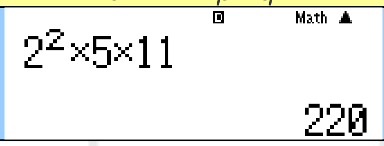
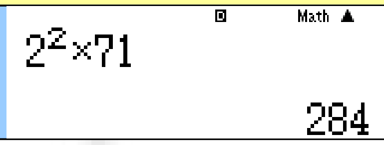
Caso *n* = 2

Veamos para $n = 2$, ¿p, q y r son primos?

Para $n = 2$ la terna $\{p, q, r\}$ es: {5, 11, 71}

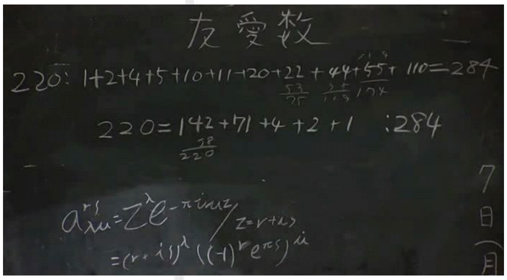
5 es primo   11 es primo   71 es primo

y vemos que los 3 son primos, por lo tanto definimos las dos nuevas variables a y b como números amigos y miramos su valor para $n = 2$

$a = 2^n \cdot p \cdot q$	$b = 2^n \cdot r$
	

¿Serán verdaderamente 220 y 284 amigos?

No hace falta comprobarlo, ya que lo hemos visto demostrado en la película:



Caso *n* = 3

Para $n = 3$ la terna $\{p, q, r\}$ es: {11, 23, 287}

11 es primo   23 es primo   287 NO es primo (287 = 7·41)

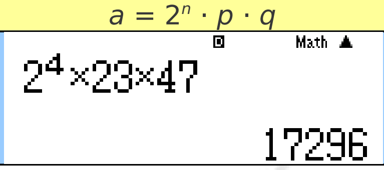
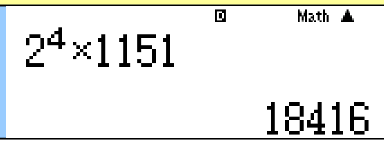
Seguimos buscando

Caso *n* = 4

La terna $\{p, q, r\}$ cuando $n = 4$ es: {23, 47, 1151}

23 es primo   47 es primo   1151 es primo

y, como vemos que los 3 son primos, definimos otra vez las variables a y b como números amigos y miramos su valor para $n = 4$

$a = 2^n \cdot p \cdot q$	$b = 2^n \cdot r$
	

Hubo que esperar hasta 1636 para que se descubrieran este otro par de números amigos, 17.296 y 18.416 hallados por el gran Pierre de Fermat. Fermat retó a Descartes a encontrar otro par de amigos, pero la tarea era complicada pues en aquél entonces las operaciones se realizaban a mano.

Caso *n* = 5

Si hacemos $n = 5$ la terna $\{p, q, r\}$ es: {47, 95, 4607}

47 es primo   95 NO es primo   4607 no nos molestamos

Caso *n* = 5

De nuevo nos preguntamos, ¿*p*, *q* y *r* son primos? Ahora hacemos *n* = 6, y la terna {*p*, *q*, *r*} que hallamos es {95, 191, 18431}

95 NO es primo

Y ASÍ SEGUIRÍAMOS BUSCANDO, dependiendo de la paciencia de cada uno.

Tanto Fermat como René Descartes redescubrieron independientemente uno de otro esa regla para construir pares de números amigos. Gracias a ella, Descartes no se dio por vencido y encontró un tercer par: 9.363.584 y 9.437.056.

En honor a la verdad debemos reconocer que ya el matemático árabe Thabit Ibn Qurra en el siglo IX encontró esa regla para obtenerlos.

Reseñar que no todos los amigos se obtienen con esta fórmula. Todos los grandes matemáticos se saltaron la pareja 1184 y 1210 descubierta años más tarde por Paganini.

Actividades de investigación

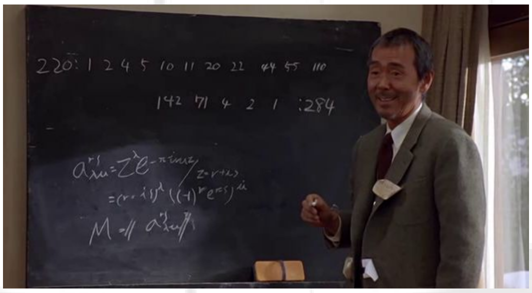
1. Busca alguna referencia de Fermat, Descartes y Paganini a los números amigos. ¿Quién es quién?



2. Si un número es amigo de sí mismo, se dice que es un "número perfecto". ¿Conoces alguno?
3. Busca más parejas de números amigos.

Actividad 5: Divisibilidad

Cuando el profesor le muestra a la asistenta su reloj y le pregunta su fecha de nacimiento, coge los dos números y los escribe en la pizarra junto con otros que va obteniendo …



El profesor dice que “sólo está utilizando la intuición”, pero … ¿habrá algo más?

Divisibilidad en los números naturales

- Una división es exacta si su resto es cero. En este caso se cumple que
  $$D = d \cdot c$$
  siendo D = dividendo, d = divisor y c = cociente.
- Una división es inexacta o entera si su resto es distinto de cero. En este caso se cumple
  $$D = d \cdot c + r$$
  siendo D = dividendo, d = divisor, c = cociente y r = resto.
- Cuando la división entre dos números es exacta, decimos que existe entre ellos **relación de divisibilidad**:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & c \end{array}$$

$$D = d \cdot c + r$$

Ejercicios

1. Comprueba si entre las parejas 476 y 16, 182 y 19, 322 y 18, existe algún criterio de divisibilidad.
2. ¿Por qué números es divisible 144?
3. Si un número es divisible por otro, ¿cuál es el resto de la división?
4. El dividendo de una división es 214, el divisor 21 y el cociente 10. ¿Es divisible 214 por 21?

Divisores de un número

La asistenta, que ya sabe algo más, le pregunta:

Un número a es divisor de otro número b si la división de b entre a es exacta.

Ejercicios

1. Halla todos los divisores de 16, 24, 36 y 54.
2. Sabiendo que el número a es divisible por 4, halla a si el cociente de la división es 29.
3. El número a no es divisible por 5. Halla a si el cociente de la división es 38 y el resto 9.
4. Si 63 es múltiplo de 9, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   - ❏ 63 es divisor de 9.
   - ❏ 63 es divisible por 9.
   - ❏ 9 es divisor de 63.
   - ❏ 9 es múltiplo de 63.

Múltiplos de un número

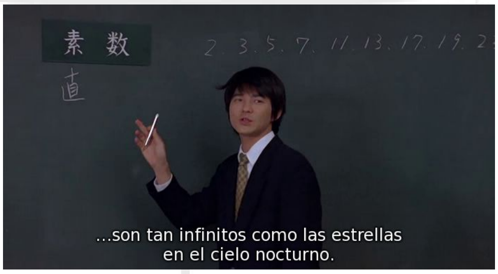
Un número b es múltiplo de otro número a si la división de b entre a es exacta.

Ejercicios

1. Halla los 6 primeros múltiplos de 4.
2. Halla los múltiplos de 4 menores que 50.
3. Halla los múltiplos comunes de 5 y 8 y menores que 50.
4. Halla un número entre 235 y 289 que sea múltiplo de 29.
5. Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 40 y 100.
6. Escribe el primer múltiplo de 32 que sea mayor que 2000.
7. ¿Son todos los múltiplos de 15 múltiplos de 3?

Números primos y compuestos

Antes de esta escena, Raíz dice a sus alumnos y alumnas: “Estos números primos ...”



y también escribe una serie de números en la pizarra, pero esta vez pasa algo distinto con ellos. ¿Qué es? ¿Qué puedes observar en la serie:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, …

que tienen en común todos ellos?

Raíz también nos explica que los símbolos que usan en japonés para representarlos significan “auténticos”, “genuinos y sin adornos”, … ¿qué quiere decir con ello?

- Un número a es primo si solo tiene dos divisores: él mismo y la unidad.
- Si un número tiene más de dos divisores, decimos que es un número compuesto.
- El número 1 sólo tiene un divisor, él mismo. No se considera un número primo pero tampoco compuesto.
- La siguiente tabla muestra los factores primos y divisores de los 16 primeros números:

Tabla de factores primos y divisores

Número	Factores primos	Divisores
1		1
2	2	1 2
3	3	1 3
4	2 2	1 2 4
5	5	1 5
6	2 3	1 2 3 6
7	7	1 7
8	2 2 2	1 2 4 8
9	3 3	1 3 9
10	2 5	1 2 5 10
11	11	1 11
12	2 2 3	1 2 3 4 6 12
13	13	1 13
14	2 7	1 2 7 14
15	3 5	1 3 5 15
16	2 2 2 2	1 2 4 8 16

Como nos dijo Raíz, existen infinitos números primos. Euclides realizó la primera demostración alrededor del año 300 a. C.

Otros matemáticos han demostrado la infinitud de los números primos con métodos diversos, contándose entre ellos Álgebra Conmutativa y Topología.

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla:

Números	Divisores	Primo / Compuesto
33	1, 3, 11, 33	Compuesto
39		
61		
72		

2. Escribe los números primos comprendidos entre 30 y 100.
3. Un número de dos cifras es divisible por 3.
   1. ¿Se puede decir que es primo?
   2. Pon un ejemplo.

Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas que nos permiten reconocer, sin realizar la división, si un número es divisible por otro.

Ejercicio

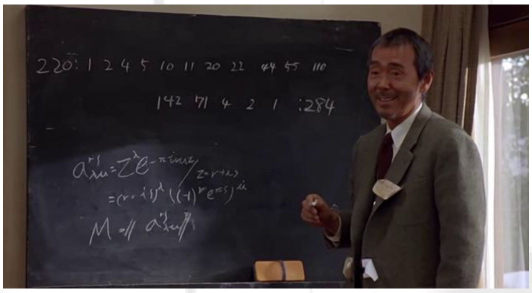
1. Los siguientes números son múltiplos del que comienza la serie. ¿Eres capaz de encontrar una relación entre ellos?
   a) **2**: 2, 4,, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, …
   b) **5**: 5, 10, 15, 20, 25, 30, …
   c) **10**: 10, 20, 30, 40, 50, …
   d) **3**: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, …

Lo que has encontrado se llama **criterios de divisibilidad**, y para los primeros números son los siguientes:

Divisible por…	Criterio de divisibilidad
2	Si la última cifra es 0 o par.
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
4	Si los dos últimos dígitos son divisibles por 4
5	Si la última cifra es 0 ó 5.
6	Si el número es divisible entre 2 y 3, también es divisible entre 6.
7	Toma el último dígito, duplícalo y réstalo del resto del número, si el resultado es divisible entre 7 (incluyendo al 0), el número también lo es. Si tiene más de dos cifras, acabas antes haciendo la división.
8	Si los últimos 3 dígitos son divisibles por 8, el número también lo es.
9	Si la suma de los dígitos es divisible entre 9, el número también lo es.
10	Si la última cifra es 0.
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar para y la suma de las de lugar impar es 0 o múltiplo de 11.
12	Si el número es divisible entre 3 y 4, también es divisible entre 12.
13	Borra el último dígito del número, entonces resta 9 veces el dígito borrado del número restante. Si lo que queda es divisible entre 13, entonces el número original también lo es.

Factorización de un número

Recuperemos la escena del profesor delante de la pizarra con los números 220 y 284 y sus divisores.



¿Ha factorizado ambos números? La respuesta es no.

Factorizar un número es descomponerlo en factores primos, es decir, expresarlo como producto de sus divisores primos. Para factorizar un número dividimos por cada uno de los números primos (2, 3, 5, ...) y nos quedamos con el cociente, el cual lo volvemos a dividir por el mismo primo mientras podamos (cuando no sea divisible, pasamos al siguiente primo). Te darás cuenta de la importancia de conocer las reglas de divisibilidad para no hacer más operaciones de la cuenta.

Ejemplo: Factorización del número 120

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

El resultado es:

$$\boxed{120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5}$$

Ejercicios

1. Descompón los siguientes números en producto de factores primos:
   a) 56
   b) 100
   c) 187
   d) 151
   e) 325
   f) 226
   g) 402
   h) 138
   i) 1200
2. ¿Cuál es la descomposición en factores primos de un número primo?

Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.
- El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes.
- Si a y b no tienen divisores comunes entonces, mcd(a,b) = 1 y mcm(a,b) = ab.

Ejemplos

1. Una habitación rectangular de 7,8 m de largo por 3 m de ancho se quiere alicatar con baldosas cuadradas lo más grandes posibles. ¿Cuánto deberá medir el lado de cada una si al colocarlas no se quiere romper ninguna?
   Para hacer los cálculos con números naturales vamos a expresar los cálculos con centímetros, 780 cm de largo y 300 cm de ancho.
   La medida del lado de la baldosa tiene que "caber" un número exacto de veces en 780 cm y 300 cm, luego hay que buscar números que dividan exactamente a las vez a am-

bos números (divisores comunes). Pero como la baldosa tiene que se lo más grande posible, hay que elegir el mayor de los divisores comunes. Este número es el máximo común divisor de 780 y 300.
Por tanto, el lado de cada baldosa cuadrada deberá medir 60 cm (mcd(300,780) = 60).
2. Calcula la capacidad del menor recipiente que puede llenarse con el líquido de un número exacto de garrafas de 4, 3 o 6 litros.
El número de litros del recipiente tiene que ser múltiplo de 3, 4 y 6, y como tiene que ser el de menor capacidad posible, entre todos los múltiplos comunes se elige el menor de ellos. Luego hay que calcular el mínimo común múltiplo de esos tres números, 3, 4 y 6, obteniendo que mcm(3,4,6) = 12. Por tanto, la capacidad del recipiente de menor capacidad es de 12 litros.

Ejercicios

1. Halla el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de los siguientes números:
   a) 16 y 24
   b) 45 y 72
   c) 12 y 36
   d) 28 y 49
   e) 8, 12 y 18
   f) 16, 20 y 28
   g) 45, 54 y 81
   h) 40, 45 y 55
   i) 75, 90 y 105
2. María está haciendo una colección de cromos. Los cromos se venden en sobres con 5 cromos cada uno. ¿Puede comprar 15 cromos? ¿Y 17?
3. Juan tiene un álbum de 180 cromos. Los cromos se venden en sobres de 5 cromos cada uno. Suponiendo que no se repita ningún cromo, ¿cuántos sobres tiene que comprar como mínimo?
4. Se van a poner plaquetas cuadradas del mayor tamaño posible en un aula rectangular de 12 m de largo por 10 m de ancho.
   a) ¿Cuál es el tamaño de cada plaqueta?
   b) ¿Cuántas plaquetas se pondrán?
5. Un helicóptero transporta víveres a un refugio de la montaña cada 10 días, y otro, cada 8 días. Si los dos helicópteros han coincidido hoy, ¿cuántos días tardarán en volver a coincidir?
6. Se dispone de dos rollos de cuerda que tienen 144 y 120 m de longitud, respectivamente. ¿Cuál es el número de trozos iguales, de tamaño máximo, que se puede hacer con los rollos de cuerda?

Criba de Erastótenes

Al presentarse por primera vez la sirvienta en la casa del profesor, él le pregunta por su número de teléfono. Ella responde rápidamente “576–1455”, pero él lo modifica preguntando:
– ¿Has dicho 5,761,455? ¿Pero cómo? ¡Es magnífico! …

¿Cómo podemos conocer todos los primos?
La Criba de Eratóstenes es un procedimiento para determinar todos los números primos hasta cierto número natural dado. Esto se hace recorriendo una tabla de números usando el siguiente algoritmo:

- Empezamos en el número 2, resaltamos el número 2 como primo pero tachamos todos los múltiplos de 2 (es decir, tachamos 4, 6, 8, etc.).
- Se continúa con el siguiente número no tachado en la tabla, en este caso el número 3, resaltamos el número 3 como primo y tachamos todos los múltiplos de 3 (es decir tachamos 6, 9, 12, etc.).

- El siguiente número no tachado en la tabla es el 5, resaltamos el número 5 como primo y tachamos todos los múltiplos de 5 (es decir tachamos 10, 15, 20, etc.)

Ese es el resultado del proceso en una pequeña tabla de números hasta el 200:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Algoritmo de Euclides

Al dividir a entre b (números enteros), se obtiene un cociente q y un resto r. El máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r. Y el máximo común divisor de cualquier número a y 0 es precisamente a.
Vamos a ver un ejemplo calculando el máximo común divisor de 225 y 60:

Paso	**Operación**	**Significado**
1	225 dividido entre 60 es 3 y sobran 45	mcd(225,60) = mcd(60,45)
2	60 dividido entre 45 es 1 y sobran 15	mcd(60,45) = mcd(45,15)
3	45 dividido entre 15 es 3 y sobra 0	mcd(45,15) = mcd(15,0)=15

Identidad de Bézout

La identidad de Bézout enuncia que si a y b son números enteros con máximo común divisor d, mcd(a, b) = d, entonces existen enteros x e y tales que:

$$a\,x + b\,y = d$$

donde los números x e y, **no** se determinan de forma unívoca.

Vamos a ver que se cumple para el ejemplo anterior, teníamos: mcd(225,60) = 15 entonces podemos considerar x = -1 e y =4 y se cumple:

$$(-1)\cdot 225 + 4\cdot 60 = 15$$

y también x = -5 e y = 19

$$(-5)\cdot 225 + 19\cdot 60 = 15$$

Ejercicios de ampliación

1. ¿Verdadero o falso?
   a) 25 es divisible por 5
   b) 100 es múltiplo de 5
   c) 3 es divisor de 24
   d) 2 es múltiplo de 16
2. Escribe 220 como producto de factores primos.
3. Busca todos los divisores de 26, 38 y 65.
4. ¿Cuánto ha de valer el signo * para que el número 2*8 sea múltiplo de 3? ¿Y para que lo sea de 2?
5. Calcula el m.c.d. de cada grupo de números:
   a) 18, 36 y 75
   b) 14, 42 y 56
   c) 27, 36 y 63

6. Halla el m.c.m. de:
   a) 72 y 108
   b) 560 y 588
   c) 46, 63 y 98
7. Los alumnos de una clase pueden formar grupos de 2, 3, 5 y 6 personas. ¿Cuántos alumnos serán como mínimo?
8. Una tienda de animales envía 24 canarios y 36 periquitos en jaulas iguales, sin mezclarlos, de modo que en todas quepa el mismo número de animales. ¿Cuántos animales deben ir en cada jaula si su número es el mayor posible?
9. Calcula 4 múltiplos de cada uno de las siguientes cifras:

   3 8 5 2 10 15

10. Escribe 3 divisores de cada uno de los siguientes números:

    12 20 14 30 45 60 6 17 3 11

11. Define qué es un número primo. Escribe 5 números primos.
12. Define qué es un número compuesto. Escribe 5 números compuestos.
13. Señala por qué números son divisibles las siguientes cantidades:
    Ejemplo: 24 es divisible por 1, 24, 2, 3, 4 y 6.

    35 120 66 75 49 63

    23 98 18 76 300 102

14. Descompón estos números en factores primos.

    15 18 42 55 70 26

    84 124 95 35 100 28

15. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números:
    a) 4 y 6
    b) 20 y 30
    c) 4 y 8
    d) 12 y 24
    e) 12 y 19
    f) 72 y 84
    g) 90 y 120
    h) 24 y 50
16. Indica de los siguientes números cuales son primos: 63, 71, 92, 122, 15401
17. Descompón en factores primos el número 490
18. ¿Es el cero:
    a) múltiplo de algún número?
    b) divisor de algún número?
    c) ¿Debe ser tenido en cuenta el 0 como factor a la hora de ser descompuestos en factores primos cualquier número?
19. Indica cuál de los siguientes conjuntos tiene la propiedad de ser múltiplo de un cierto número natural:
    a) A:{3,15,17,45,23,0,14}
    b) B:{0,77,49,56,84,91,98}
    c) C:{5,24,33,61,18,21,37}
    d) D:{0,35,96,41,27,29,62}
20. Descompón los siguientes sumandos en factores primos y saca el mayor factor común:

    $$30 + 225 + 105$$

21. Descompón en factores primos los siguientes números

    14560 1890 698544

Problemas para aplicar

Problema resuelto

Álvaro tiene 60 libros y quiere empaquetarlos poniendo el mismo número de libros en cada paquete. ¿De cuántas formas puede hacerlo, si quiere que cada paquete tenga más de 3 libros y menos de 12?

Respuesta

Podrá poner en cada paquete tantos números como divisores tiene 60.

D (60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}

Los divisores mayores que 3 y menores que 12 son: 4, 5, 6 y 10. Luego podrá colocarlos de cuatro maneras.

Ejercicios

1. Celia tiene ahorrados 140 euros y quiere tener su dinero en billetes del mismo valor. ¿De cuántas formas puede hacerlo?
2. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 47 bolígrafos en estuches, de modo que cada estuche tenga el mismo número de bolígrafos?
3. En el patio del colegio hay más de 40 alumnos y menos de 50. El profesor los quiere colocar en filas, de modo que haya el mismo número de alumnos en cada fila. Sólo puede hacerlo de tres maneras. ¿Cuántos alumnos hay en el patio?
4. María está guardando los adornos de Navidad. Si coloca 12 bombillas en cada caja, quedarán 3 sin colocar.
   a) ¿Cuántas quedarían sin colocar si pusiera 6 en cada caja? ¿Y si pusiera sólo 4?
   b) Hay menos de 100 bombillas y su número es capicúa. ¿Cuántas bombillas hay?

Autoevaluación

1. Escribe los divisores de 48, 54 y 100.
2. Escribe los 10 primeros múltiplos de 7.
3. Escribe todos los números primos comprendidos entre cada par de números:
   a) 40 y 50
   b) 80 y 100
   c) 100 y 120
4. Señala cuáles de los siguientes números son primos y escribe los compuestos como producto de dos números:
   a) 21
   b) 23
   c) 67
   d) 67
   e) 53
   f) 35
5. De todos estos números 231, 373, 248, 150, 627, 222, 115, 180, indica:
   a) Los múltiplos de 2
   b) Los múltiplos de 3
   c) Los múltiplos de 5
6. Descompón en factores primos: 144 y 225
7. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de:
   a) 24 y 36
   b) 50, 100 y 125
8. En una biblioteca hay entre 150 y 200 libros. ¿Cuántos son exactamente si pueden agruparse en cajas de 5, de 9, de 15 y de 18 unidades?
9. Deseamos partir dos cuerdas de 20 m y 30 m en trozos iguales lo más grandes posible y sin desperdiciar nada. ¿Cuánto medirá cada trozo?
10. Las lineas de autobuses A y B inician su actividad a las siete de la mañana desde el mismo punto de partida. Si la línea A pasa cada 24 minutos y la línea B, cada 36, ¿a qué hora después de las siete, vuelven a coincidir las salidas?

Problema: Averigua la edad de Cleopatra

http://www.correodelmaestro.com/anteriores/1998/marzo/sinum22.htm

Uno de los emperadores romanos miraba embelesado a Cleopatra el día en que la conoció y mientras tanto se preguntaba su edad. Como era un caballero, decidió no preguntársela directamente a ella, por lo que recurrió a uno de los sacerdotes egipcios para que le resolviera la duda.

El sacerdote sonriendo sarcásticamente le respondió lo siguiente:

- Multiplique el número de los brazos por el número de piernas de Cleopatra y luego por el número de sus admiradores, que es un número primo; al resolver esta sencilla operación obtendrá la edad de la emperatriz.
- ¿No me puede dar más datos, como por ejemplo, cuántos admiradores tiene Cleopatra? –preguntó confundido el emperador romano.
- Bueno –dijo el sacerdote– le puedo decir que la emperatriz es perfecta y que además su edad es un número perfecto.

¿Cuál era la edad de Cleopatra en ese momento?

Solución

Obviamente Cleopatra tiene 2 brazos y 2 piernas. Recordemos que el sacerdote dijo que ella era perfecta y suponiendo que el número de sus admiradores es n, entonces la edad de Cleopatra es 2 x 2 x n, es decir, $4n$.

Como este número es perfecto, es igual a la suma de sus divisores propios. Los divisores propios de $4n$ son: 1, 2, 4, n y $2n$; éstos son los únicos, pues, como n es primo, sus únicos divisores son 1 y n.

Así pues:

$$4n = 1 + 2 + 4 + n + 2n$$

agrupando términos:

$$4n = 7+ 3n$$

llevando el $3n$ al miembro izquierdo

$$4n - 3n = 7$$

entonces

$$n = 7$$

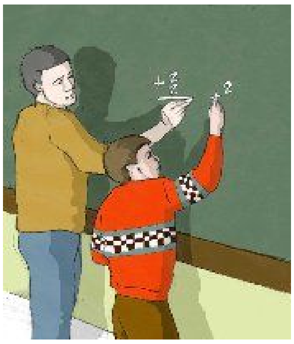
Es decir, Cleopatra tiene 7 admiradores y por tanto su edad es 4 x 7=28 años.

Veamos que 28 es, en efecto, un número perfecto. Los divisores propios de 28 son 1, 2, 4, 7 y 14, y 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.

Aprendizaje afectivo.

Los profesores alcanzan la inmortalidad a través de sus alumnos

> "El dominio afectivo en el aprendizaje matemático es un concepto relativamente reciente. Desde la década de los setenta, numerosas investigaciones centradas en los procesos de aprendizaje de Matemáticas comenzaron a centrarse en la dimensión afectiva. En ellas, se ponía de manifiesto que las cuestiones afectivas juegan un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y que algunas de ellas están muy arraigadas en el sujeto y no son fácilmente desplazables por la instrucción. De este modo es esencial considerar los principales descriptores básicos del dominio afectivo, las creencias, actitudes y emociones, y cómo los afectos van a condicionar el éxito y/o fracaso del estudiantado a la hora de enfrentarse a esta disciplina".
>
> Nuria Gil, Lorenzo J. Blanco y Eloísa Guerrero.



Tras ver la película y leer este artículo podemos hacer esta reflexión:
Todos hemos disfrutado a lo largo de nuestra vida estudiantil de algún "buen" profesor. Incluso alguno de nosotros escogió esta profesión inspirado en un maestro o maestra que se convirtió, sin probablemente pretenderlo, en nuestro ejemplo a seguir.
Curiosamente, el profesor(a) que más recordamos, aquel que marcó en forma importante nuestras vidas, generalmente es un maestro que supo escucharnos, acogernos, guiarnos, más que enseñarnos muchos contenidos, lo cual sabemos que no deja de ser importante. Pero, finalmente, recordamos en forma especial, a un maestro por el lado "humano del proceso educativo".

Una vez pasado el tiempo, podemos intentar analizar qué cualidades tenía aquel profesor que nos hacía sentirnos a gusto en el aula y que nos hacía comprender la materia hasta el punto de disfrutar con ella.

El análisis se hace muy complicado ya que, por mucho que nos duela, el niño de ahora no es tan parecido al niño que nosotros fuimos. Seguro que en algún momento de tu vida laboral has tenido que distribuirles a los muchachos *tests* elaborados por el Departamento de Orientación en los que se les pedía valorar al profesor. Cuando uno es evaluado no puede evitar sentir cierto miedo al fracaso. Pero la solución no es "yo soy así guste o no guste". Obviamente, todos tenemos una forma de ser pero siempre podemos mejorar.

Podríamos, tras el visionado de la película, proponernos una auto-evaluación. Nos hemos basado en multitud de artículos que recogían experiencias personales relacionadas con la relación profesor–alumno. Parece que hay unos rasgos atemporales que pueden proporcionarnos la clave para mejorar nuestra práctica docente y con ello nuestra vida. Con este fin, y con la absoluta certeza de que la parte emocional es básica en el aprendizaje de cualquier disciplina, podemos dedicar unos minutos a meditar sobre nuestro estilo como educadores.

Recordad que no somos psicólogos, sólo somos unos humildes maestros con buenas intenciones. A nosotros nos ha hecho pensar y, sin lugar a dudas, alguna de las diez semillas plantadas germinará en nuestra cabeza ...

El test del buen profesor

(Autoría propia)

- ❏ Un buen profesor es alguien feliz.
- ❏ Un buen profesor tiene conciencia de la valía de su misión.
- ❏ Un buen profesor es autónomo.
- ❏ Un buen profesor potencia la capacidad del alumno/a de autodescubrirse, de desarrollarse plenamente.
- ❏ Un buen profesor actúa pensando y poniéndose en el lugar de los alumnos.
- ❏ Un buen profesor es justo en sus decisiones.
- ❏ Un buen profesor toma decisiones efectivas.

- ❑ Un buen profesor es alguien con la autoridad que surge de quien posee experiencia, de quien enuncia verdades basadas en hechos o conocimientos que ha adquirido en su vida.
- ❑ Un buen profesor es culto. Sólo un profesor con el conocimiento y la sabiduría propia permitirán responder a la necesidad vital del alumno de reconocer que existen otras formas de actuar, mejores y más éticas que lo que ya hacen
- ❑ Un buen profesor es un servidor de las vocaciones ajenas.

Un test para el alumnado

Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa.
ISSN 1696-20095, nº 8, Vol. 4 (1) 2006, pp 47-72

El alumnado debe contestar a estas preguntas con una de las cuatro opciones siguientes:
Muy de acuerdo De acuerdo En desacuerdo Muy en desacuerdo

1. Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida
2. Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad
3. En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas
4. Casi todos los problemas de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto
5. Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer
6. La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual
7. El resultado al que llego tras intentar resolver un problema es más importante que el proceso que he seguido
8. Sabiendo resolver los problemas que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos
9. Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver problemas no tienen nada que ver con las que utilizo para resolver problemas en la vida cotidiana
10. Busco distintas maneras y métodos para resolver un problema
11. Aprendo mucho inventándome nuevos problemas
12. El gusto por las matemáticas influye a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato en la que estén o no presentes
13. El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirse más valorado y admirado por los compañeros
14. Si no comprendo las matemáticas, difícilmente podré asimilar y dominar otras asignaturas relacionadas con ella (como física, química, etc.)
15. Mi rendimiento en matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí
16. Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de problemas
17. Cuando resuelvo un problema suelo dudar de si el resultado es correcto
18. Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los problemas de matemáticas
19. Me considero muy capaz y hábil en matemáticas
20. Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando resuelvo problemas de matemáticas
21. Cuando me esfuerzo en la resolución de un problema suelo dar con el resultado correcto
22. La suerte influye a la hora de resolver con éxito un problema de matemáticas
23. En clase de matemáticas los/as profesores/as emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que me permiten relacionar las matemáticas con situaciones de mi vida diaria

24. Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase
25. Los profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase
26. Para mis profesores/as de matemáticas soy un/a buen/a alumno/a
27. Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias
28. Los/as buenos/as profesores/as que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas
29. Los/as profesores/as de matemáticas se interesan por mi evolución y rendimiento en la materia
30. En clase de matemáticas los/as profesores/as valoran mi esfuerzo y reconocen mi trabajo diario en la asignatura
31. Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas
32. Las matemáticas que nos enseñan en el instituto no les interesan a mis padres
33. Alguno de mis padres era bastante bueno/a resolviendo problemas de matemáticas
34. Alguno de mis padres me anima y ayuda con los problemas de matemáticas
35. Mis amigos/as pasan de las matemáticas
36. Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas
37. La gente a la que le gustan las matemáticas suelen ser un poco raras
38. El aumentar mis conocimientos matemáticos me hará sentir una persona competente en la sociedad
39. Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas
40. Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores
41. La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando cómo resolver un problema
42. Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo
43. Disfruto los días que no tenemos clases de matemáticas porque no me interesan ni me atraen
44. Ante un problema complicado suelo darme por vencido fácilmente
45. Cuando me enfrento a un problema experimento mucha curiosidad por conocer la solución
46. Me angustio y siento miedo cuando el profesor me propone “por sorpresa” que resuelva un problema
47. Cuando resuelvo problemas en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a
48. Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un problema empiezo a sentirme inseguro, desesperado, nervioso,...
49. Si no encuentro la solución de un problema tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo
50. Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un problema matemático
51. Cuando fracasan mis intentos por resolver un problema lo intento de nuevo
52. La resolución de un problema exige esfuerzo, perseverancia y paciencia

Actividad 6: Resolución de problemas

En esta película se puede observar cómo el profesor tiene una paciencia "infinita" con Raíz, sobre todo al ayudarle con los problemas. Con toda la calma del mundo se dedica a dibujar los calcetines y los pañuelos. Sin embargo, la mejor frase, a mi parecer, es la de:

"Cada problema tiene su ritmo"

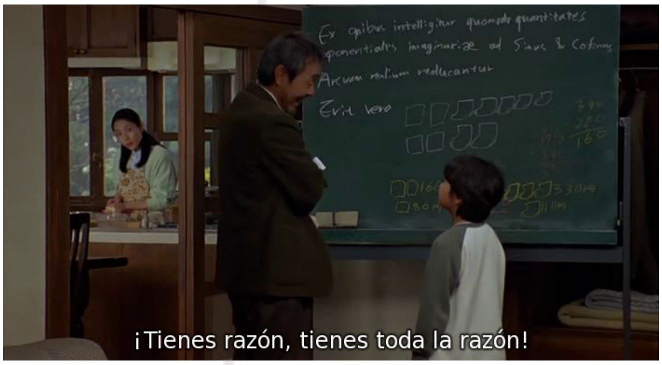
aunque casi ninguna frase de la explicación del profesor tiene desperdicio:

- Escúchame. Cada problema tiene su ritmo.
- Si lees el problema en voz alta y coges el ritmo… puedes contemplarlo en su totalidad.
- Y empezar a conjeturar los obstáculos que puedan acechar.
- "Compré 2 pañuelos y 2 pares de calcetines por 380 yens. Esos mismos pañuelos y 5 pares de calcetines cuestan 710 yens. ¿Cuánto cuesta cada cosa?".
- En verdad, este debe ser el problema más difícil de hoy.
- Pero lo has leído en voz alta maravillosamente.
- Pañuelos, calcetines, precio.
- Pañuelos, calcetines, precio.
- Has captado el ritmo perfectamente.
- Una tarea aburrida se lee como un auténtico verso.
- Bien, vamos a tratar de dibujarlo.
- …

La explicación que da Raíz a la clase tras este episodio también es digna de traer aquí:

- En todo momento … el profesor no buscaba simplemente la respuesta correcta.
- El profesor prefería los estrambóticos errores y el silencio de mi rendición a no obtener la solución.
- No importa lo estúpido que fuera el callejón sin salida … el profesor siempre encontraba algo positivo para hacerme sentir orgulloso.

Esta escena concluye con el profesor afirmando entusiasmado:



Aplicación en el aula

No pretendemos dar aquí una regla infalible que permita resolver un problema, sino tratar de orientar en las pautas que debemos seguir. Podemos pedirles a nuestros alumnos y alumnas que resuelvan ese mismo problema, y que determinen qué pasos deben dar. Por ejemplo:

1. Leer el problema entero, sin tomar dato alguno.
2. Re-leer el problema extrayendo toda la información (escribiendo).
3. Entender de qué me hablan (qué sé sobre ello).
4. Determinar qué me piden (a dónde quiero llegar).
5. Intentar llegar allí con el conocimiento que poseo (los datos y mi conocimiento).

El paso 4 contrasta con lo que vimos en Alicia en el País de las Maravillas. Cuando Alicia se encuentra con el Gato de Cheshire:

- Alicia: "Sólo quiero saber qué camino tomar".
- Gato: "Pues depende adónde quieras ir tú".
- Alicia: "Eso no importa. Si tú me dices …"
- Gato: "Entonces, realmente no importa el camino que escojas".

¿No es eso lo que nos ocurre al ver a algunos de nuestros alumnos resolver un problema? Este diálogo puede traducirse en un aula por este:

– Alumno/a: “¿Cómo se hace esto?”
– Profesor/a: “Piensa, ¿a dónde quieres llegar?”
– Alumno/a: “No sé, sólo quiero quitarlo de delante.”

A veces dan ganas de imitar al Gato y contestar:

– “Entonces, realmente no importa el método que escojas.”

pero el profesor nos enseña a buscar otra forma. Tampoco se trata de coartar su libertad e imponer un camino o método, no se trata de acabar en el manido:

– “Es que si no lo hago así, el profe me riñe y me lo pone mal”,

debemos aprovechar la capacidad creativa que los niños y niñas aún tienen en los primeros cursos de ESO.

El paso 5 es una especie de cajón desastre, donde pueden encajar todos los métodos que son conocidos y se repiten a cientos en los libros de texto (hacer un dibujo, ir hacia atrás, suponer el problema resuelto, …).

Resolvamos este problema, aunque nuestro “dibujo” va a ser algo mejor que el del profesor:

Compra	**Calcetines**	**Pañuelos**	**Coste**
Compra 1			380 ¥
Compra 2			710 ¥

Es el momento de decidir:
1. ¿Dejamos que se forme una tormenta de cerebros? (*brainstorming*)
2. ¿Les guiamos a través del problema?
3. ¿Trabajamos en parejas?
4. …

La respuesta vendrá dada en función del grupo con que estemos trabajando, del grado de madurez que hayan alcanzado, … Creo de gran importancia acostumbrar al alumnado a:
1. No borrar sus errores.
   De los fallos se aprende y muchas veces se extrae valiosa información acerca de los caminos que siguieron para llegar a la solución.
2. No descartar demasiado pronto sus elecciones.
   Si es la primera vez que se enfrentan a un problema, no saben *por dónde* va a estar la solución, luego no saben si hacen bien o mal despreciando un camino.
3. Evitar frases del tipo:
   1. “Eso no sé hacerlo”.
   2. “Nunca se me dieron los problemas”.
   3. “Las mates no son lo mío”.
   4. …

   Como comentamos antes, la motivación juega un papel fundamental en la construcción del conocimiento, y actitudes descritas con frases lapidarias como las anteriores no juegan a su favor.

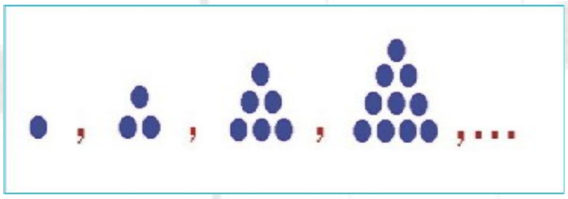
¿Y luego? Una vez resuelto el problema, ¿qué? Los libros especializados en el tema, escritos por Polya, Miguel de Guzmán, … aconsejan extraer información, mejorar el método, aprovechar todo el trabajo realizado para entender los pasos que han dado. No seremos nosotros quienes les contradigan aunque, de nuevo, el grupo que nos haya correspondido dictará las pautas de hasta dónde podemos avanzar con ellos/as.

Actividad 7: Números triangulares

Este es un tema que no se trata en la película, pero sí aparece en el libro de Yoko Ogawa. Nos parece que es un tema muy interesante y que merece un apartado en este trabajo.

Definición

Un **número triangular** es aquel que puede recomponerse en la forma de un triángulo equilátero (por convenio, el primer número triangular es el 1). Los números triangulares, junto con otros *números figurados*, fueron objeto de estudio por Pitágoras y los Pitágoricos, quienes consideraban sagrado el 10 escrito en forma triangular, y al que llamaban **trianón** o **tetraktys** (véase en “**Los Crímenes de Oxford**”)



En el libro, el profesor explica muy simplemente (en la línea que estamos viendo a lo largo de toda la película) los números triangulares:

- … los números triangulares expresan la suma de los números naturales desde el 1 hasta cierto número, lo quieran ellos mismos o no…

Esta frase puede llevarnos a relacionar esta actividad con la Actividad 2, que trata el factorial.

WebQuest

Para esta actividad hemos elegido realizar una *webquest*. La metodología de las *webquest* se adapta muy bien al uso de las hojas de cálculo y a una buena atención a la diversidad, lo que constituye un punto de partida que admite organizarla con distintos itinerarios de aprendizaje según los niveles del alumnado.
Se puede comenzar con cualquiera de las siguientes frases:

- … los números triangulares expresan la suma de los números naturales desde el 1 hasta cierto número, lo quieran ellos mismos o no…
- Los números triangulares expresados en base decimal no pueden terminar en 2, 4, 7 ó 9

y organizar una webquest para entender bien su significado y los fundamentos de esa afirmación. Incluimos a continuación algunos pasos que se podrían seguir:

WebQuest 1: ¿En qué terminan los números triangulares?

El alumnado deberá investigar por su cuenta:

1. Definición de número triangular.
   a) Para el alumnado más aventajado, se sugerirá alguna búsqueda de carácter histórico sobre estos números.
   b) Los estudiantes con dificultades pueden copiar imágenes de números triangulares y pegarlas en un documento.
2. Fórmula de los números triangulares
   Lo ideal sería que se pudiera deducir en el aula esta fórmula mediante inducción y discusión en grupos con la ayuda del profesorado. Así lo ha conseguido el autor en varias ocasiones, sino, en las mismas páginas se puede encontrar dicha fórmula.
   Una vez conseguida la fórmula

   $$T(n) = n \cdot (n + 1) / 2$$

   se construye una tabla de números triangulares con una hoja de cálculo.
   a) Este paso admite una rama de profundización consistente en buscar en la red propiedades de los números triangulares y experimentarlas con la misma hoja de cálculo. También se puede intentar generarlos por recurrencia:

   $$T(n+1) = T(n)+n+1$$

b) Una rama de consolidación del aprendizaje consistiría en aplicar esa fórmula sin el uso del ordenador y reproducir en papel las operaciones que se han efectuado en la hoja de cálculo.
c) Terminación de los números triangulares

3. Ya se está en condiciones de comprobar que ningún número triangular termina en 2, 4, 7 ó 9, y, lo más importante, intentar justificarlo mediante la fórmula o razonamiento. Mediante la fórmula

$$T(n) = n \cdot (n + 1) / 2$$

se puede discutir en qué cifra puede terminar n, después n+1, su producto y, por último, la mitad del mismo. Una tabla de hoja de cálculo podría ser muy útil.

4. Una actividad de perfeccionamiento consistiría en usar la propiedad de que

“si tomo ocho veces un número triangular y después sumo 1, resulta un cuadrado”

Se estudian las terminaciones de los cuadrados impares, se les quita una unidad y se discute su cociente entre 8.
Para el alumnado que necesite consolidar lo aprendido, se puede organizar el cálculo de números triangulares grandes para comprobar sus terminaciones.

5. Presentación de resultados.
Todo el trabajo realizado se expone al resto del aula mediante documentos, presentaciones o puestas en común. Si se dispone de una web de centro, se incluye en ella todo el material generado en la webquest.

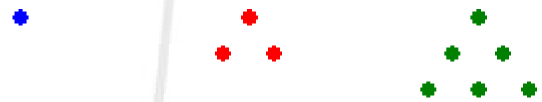
Con estas ideas, adaptándolas al nivel y características de los y las estudiantes, podemos diseñar una o dos sesiones de trabajo que pueden resultar interesantes.

WebQuest 2: Reconocimiento de números triangulares

El objetivo ahora es capacitar a los alumnos para reconocer los números triangulares y el tipo de número relacionado con ellos.

Los pasos a dar serán:

1. Revisar el material tratado en la actividad anterior.
2. Introducir el tema a tratar con la ayuda de un diagrama en la pizarra.



1 3 6

3. Los alumnos deben dibujar los tres números triangulares.
   a) Preguntar a los alumnos cuantos puntos hay de más en el siguiente número triangular.
   b) Subrayar la relación que hay entre los números triangulares y los contables;.por ejemplo, el segundo número triangular es igual a la suma de los dos primeros números contables.

4. Preguntar a la clase la secuencia de los números triangulares

1, 3, 6, 10, 15 …

mediante cuestiones tales como:
¿cuántos puntos hay en el primero / segundo / tercer … número triangular?

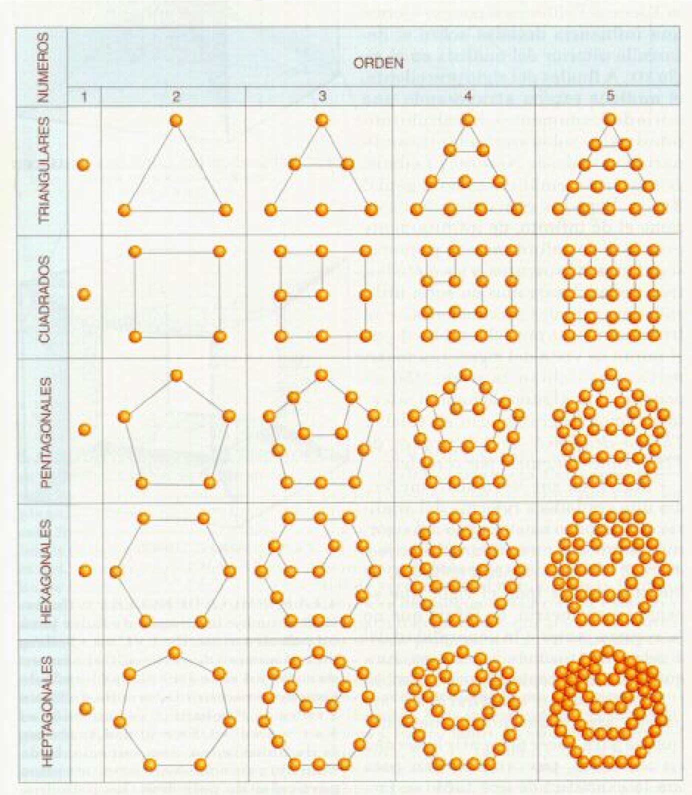
5. Dibujar una figura a base de puntos para mostrar la secuencia de los diez primeros números triangulares en la pizarra.

6. Preguntar a los alumnos el décimo número triangular.

7. Representar la secuencia de los números triangulares en una línea de números. Una vez dibujada en la pizarra , pedir a los alumnos que continúen con el siguiente número.

WebQuest 3: Avanzando un poco. Números poligonales

¿Por qué quedarse en triángulos? Los números poligonales se remontan al comienzo mismo de la matemática, ya que fueron los propios pitagóricos los que los descubrieron. Tal vez, la mejor forma de comprender los números poligonales es percatarse que en aquella época los números se representaban mediante guijarros (*calculi*) que se disponían en una superficie.
Algunos números pueden disponerse formando figuras geométricas, por ejemplo 3 guijarros se pueden disponer formando un triángulo, 4 forman un cuadrado, etc.



Una vez alcanzado un mínimo conocimiento de álgebra, nuestros alumnas deberían obtener las relaciones siguientes:

1. Los números triangulares son enteros del tipo N = 1 + 2 + 3 + … + n
2. Los números cuadrados son enteros del tipo N = 1 + 3 + 5 + 7 + … + (2n – 1)
3. Los números pentagonales son enteros del tipo N = 1 + 4 + 7 + … + (3n – 2)
4. Los números hexagonales son enteros del tipo N = 1 + 5 + 9 + … + (4n – 3)
5. … Y así sucesivamente.

En general, los números poligonales son enteros del tipo

$$n + \frac{n(n-1)b}{2}$$

Cuando b=1 se dice que es un número triangular, para b=2 cuadrados, para b=3 pentagonales, … Los números poligonales se pueden obtener mediante recurrencia:
Sea n el número de orden del número poligonal:

$$T(n) = T(n-1) + n$$
$$C(n) = C(n-1) + (2n-1)$$
$$P(n) = P(n-1) + (3n-2)$$
$$\ldots$$
$$M(n) = M(n-1) + (m-2)(n-1) + 1$$

Otras peculiaridades:

1. Observemos que si tomamos el primer número de cada serie de números poligonales (3, 4, 5, 6, …) obtenemos una progresión aritmética de diferencia 1. Si tomamos el segundo número de cada serie (6, 9, 12, 15, …) obtenemos una progresión aritmética de diferencia 3, y así sucesivamente.
2. Según Fermat, todo número entero puede expresarse mediante la suma de n números n-gonales como máximo. Gauss demostró esta conjetura para los números triangulares y cuadrados, Cauchy consiguió dar una demostración general.

Actividad 8: Tipos de números naturales

La actividad anterior ya nos puso sobre aviso de que con los números podemos hacer algo más de lo que sabemos. La matemática griega era muy distinta a la nuestra en muchos aspectos, especialmente en lo que se refiere a cómo exponían sus resultados, pero también en la forma en que surgían las ideas sobre las que trabajar.

En aquellos antiguos tiempos los números eran representados mediante "cálculos", palabra que procede del griego y significa **piedras**. Ya dijimos antes que jugaban con ellos colocándolos de distintas formas, siendo las más utilizadas en la antigüedad las que tenían forma de rectángulo, usando para ello tantas "piedrecillas" como indique el número natural.

Ejemplo: Representaciones rectangulares del natural 12.

oooooooooooo	oooooo	oooo
	oooooo	oooo
		oooo

Otras representaciones geométricas para cada número natural hicieron nacer los llamados números triangulares, pentagonales,... de los que hablamos antes. Pero centrémonos en los rectángulos:

Expresa mediante varias representaciones rectangulares
los números naturales del 1 al 10

1. ¿Observas algo especial?
2. ¿Reconoces alguna de las cosas de las que ya hemos hablado?
3. ¿Qué números sólo pueden colocarse en una fila?

Las preguntas anteriores nos devuelven al momento en que se definió de manera natural el concepto de divisor y múltiplo:

- **Divisor** de un número natural "a" cualquiera es todo natural "b", número de filas o de columnas de una posible representación rectangular del natural "a".
  En el ejemplo y observando la segunda disposición en cálculos vemos que 2 o 6 son divisores de 12 ya que son filas y columnas respectivamente de esta disposición rectangular.
- **Múltiplo** de un número natural "a" cualquiera es todo natural "b" de tal modo que alguna representación rectangular de "b" tenga como número de filas o de columnas al natural "a".
  En la tercera disposición del ejemplo se observa como el número 12 sea múltiplo del número 3 ya que en la disposición hay tres filas.

Siguiendo esta definición gráfica de múltiplo y divisor podemos dar las siguientes definiciones griegas:

- Un número natural es **primo** si sólo admite una única representación rectangular (salvo el cambio de filas por columnas).
  Ejemplo: El número 7 es primo ya que sólo admite una única representación en forma rectangular.
  ooooooo
- Un número se dice **compuesto** si admite más de una representación rectangular.
  Ejemplo: El número 6 es compuesto ya que no sólo admite una única representación en forma rectangular (salvo intercambio de filas y columnas).

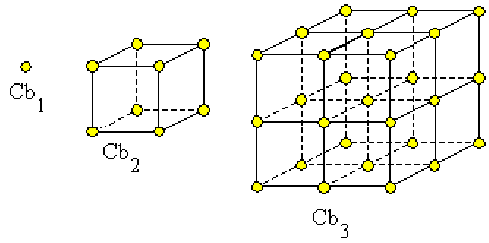
oooooo	ooo
	ooo

Actividades

1. Expresa mediante una representación rectangular tres números primos comprobando que dicha expresión es única.
2. Expresa mediante representaciones rectangulares los números 16, 15, 14 y 21, calcula de este modo todos los divisores de dichos números.
3. Haz lo mismo con las edades de tus familiares más cercanos, y determina si son números primos o compuestos

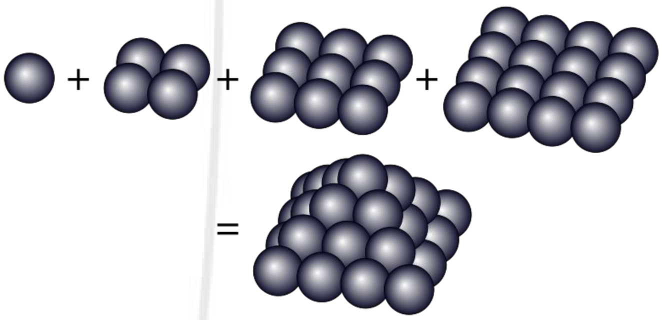
Ya vimos como los pitagóricos definieron, siempre basados en la geometría de los cálculos, los números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales, etc... pero no se quedaron ahí. Podemos también entender determinadas definiciones acudiendo al espacio:

- Un número natural es **cubo (perfecto)** si admite una representación en forma de cubo geométrico:



- Un número natural es tetraédrico si las piedrecillas pueden amontonarse formando tetraedros:

- Un número natural es piramidal cuadrado si al amontonar piedrecillas vamos construyendo una pirámide de base cuadrada (como las de Egipto)



- ...

Actividad

1. Elige una figura cualquiera (plana o tridimensional):
   a) Escribiendo en un papel los números que van surgiendo al amontonar piedrecillas siguiendo esa figura.
   b) Observa tanto los números que van saliendo como los que vas añadiendo en cada capa
   c) ¿Encuentras alguna cosa que te resulte interesante?

Haciendo preguntas como las anteriores, se obtuvieron otras definiciones que han dado mucho que hablar a lo largo de la historia: entre ellas, los números perfectos y los números amigos que aparecen en la película:

1. Un número se llama **perfecto** cuando es igual a la suma de sus divisores (exceptuando a él mismo), es decir, sumando sus partes *alícotas*.
   Ejemplo: El número 6 es un número triangular y además perfecto ya que sus partes alícuotas son 1, 2 y 3 que suman 6.
   A partir de la definición de número perfecto, surgen otras tres:
   a) Un número es **abundante** cuando la suma de sus partes alícuotas (sus divisores propios) es mayor que el número.
   Ejemplo: las partes alícotas del 12 son 1, 2, 3, 4 y 6 cuya suma es 16, superior a 12. Por tanto el número 12 es abundante.
   b) Un número es **deficiente** cuando la suma de sus partes alícuotas (sus divisores propios) es menor que el número.
   Ejemplo: las partes alícotas del 9 son 1 y 3 cuya suma es 4, inferior a 9.

c) Número **semiperfecto**: todo número natural que cumple que es igual a la suma de algunos de sus divisores propios.
Por ejemplo, 18 es semiperfecto ya que sus divisores son 1, 2, 3, 6, 9 y se cumple que 3+6+9=18

¿Puedes encontrar algún otro número abundante, deficiente y semiperfecto?

2. Dos números se llaman **amigos** cuando cada uno es igual a la suma de las partes alícotas del otro.
Ejemplo: 220 y 284 son amigos, sus partes alícotas son:
220 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55, 110
1, 2, 4, 71, 142 284
que puedes comprobar que suman respectivamente suman 284 y 220.

Otros tipos de números

El estudio de ciertas propiedades que cumplen los números ha producido una enorme cantidad de tipos de números, la mayoría sin un interés matemático específico. Aquí van algunos:

Número narcisista: Número de n dígitos que resulta ser igual a la suma de las potencias de orden n de sus dígitos. Ejemplo: $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$.

Número omirp: Número primo que al invertir sus dígitos da otro número primo. Ejemplo : 1597 y 7951 son primos. (si nos damos cuenta es primo escrito al revés)

Número vampiro: Número que se obtiene a partir del producto de dos números obtenidos a partir de sus dígitos. Ejemplo: 2187 = 27 x 81.

Números sociables: cumplen lo mismo que los números amigos pero en vez de ir en parejas van en grupos más grandes. La suma de los divisores del primer número da el segundo, la suma de los del segundo da el tercero, y así sucesivamente. La suma de los divisores del último da el primer número de la lista. Por ejemplo los números 12496, 14288, 15472, 14536 y 14264 son números sociables.

Número apocalíptico: todo número natural *n* que cumple que 2^n contiene la secuencia 666. Por ejemplo, los números 157 y 192 son números apocalípticos.

Número ambicioso: todo número que cumple que la secuencia que se forma al sumar sus divisores propios, después los divisores propios del resultado de esa suma, después los del número obtenido…acaba en un número perfecto. Por ejemplo, 25 es un *numero ambicioso* ya que sus divisores propios son 1 y 5 y se cumple que 1+5=6, que es un número perfecto.

Número curioso: todo número natural *n* que cumple que n^2 tiene al propio *n* como última cifra. Por ejemplo, 25 y 36 son números curiosos.

Sean a, b ∈ Z, se dice que **son primos relativos (o coprimos) “a” y “b” si no tienen ningún factor primo en común**, es decir, si no tienen otro divisor común más que 1 ó -1, o cumplen que **el mcd (a, b) = 1**.

Número de Carmichael: todo número compuesto *n* que cumpla que $b^{n-1} \equiv 1$ (mod (n)).para todo natural *b* que sea primo relativo con n. Por ejemplo, 561 y 1105 son números de Carmichael.

Número malvado: todo número natural cuya expresión en base 2 (binaria) contiene un número par de unos. Por ejemplo,12 y 15 son números malvados ya que $12=1100_2$ y $15=1111_2$.

Número feliz: todo número natural que cumple que si sumamos los cuadrados de sus dígitos y seguimos el proceso con los resultados obtenidos el resultado es 1. Por ejemplo, el número 203 es un número feliz ya que $2^2+0^2+3^2=13$; 12+32=10; $1^2+0^2=1$.

Número infeliz: todo número natural que no es un número feliz. Por ejemplo, el número 16 es un número infeliz.

Número hambriento: el k-ésimo número hambriento es el más pequeño número natural *n* que cumple que 2^n contiene los primeros k dígitos de Pi. Los primeros números hambrientos son: 5, 17, 74, 144, 144, 2003,…

Número afortunado: Tomemos la secuencia de todos los naturales a partir del 1: 1, 2, 3, 4, 5,… Tachemos los que aparecen en las posiciones pares. Queda: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,… Como el segundo número que ha quedado es el 3 tachemos todos los que aparecen en las posiciones múltiplo de 3. Queda: 1, 3, 7, 9, 13,… Como el siguiente número que quedó es el 7 tachamos ahora todos los que aparecen en las posiciones múltiplos de 7. Así sucesivamente. Los números que sobreviven se denominan números afortunados.

Número de Fermat: todo número natural de la forma 2^{2n+1} para algún n. Si ese número resulta ser primo se denomina **primo de Fermat**.

Número de Mersenne: todo número natural de la forma 2^{p-1}, siendo *p* un número primo. Si ese número resulta ser primo se denomina **primo de Mersenne**.

Número odioso: todo número cuya expresión en base 2 (binaria) contiene un número impar de unos. Por ejemplo, $11 = 1011_2$ es un número odioso.

Número palindrómico o capicúa: número natural que se lee igual de derecha a izquierda y de izquierda a derecha. Por ejemplo 1348431.

Número poderoso: todo número natural *n* que cumple que si un primo *p* es un divisor suyo entonces p^2 también lo es. Por ejemplo, el número 36 es un número poderoso ya que los únicos primos que son divisores suyos son 2 y 3 y se cumple que 4 y 9 también son divisores de 36.

Número oblongo: todo número natural que cumple que es el producto de dos naturales consecutivos. Por ejemplo, los números 30, 42 y 56

Número repunit: todo número natural que está formado solamente por unos: 1, 11, 111, 1111,...

Número de Smith: todo número natural que cumple que la suma de sus dígitos es igual a la suma de los dígitos de sus divisores primos contando su multiplicidad (es decir, el número de veces que aparece cada uno de ellos). Por ejemplo, el número 27 es un número de Smith ya que 2+7=9 y su único divisor primo es 3, que aparece tres veces, y por tanto 3+3+3=9.

Número libre de cuadrados: todo número natural que cumple que en su descomposición en factores primos no aparece ningún factor repetido. Por ejemplo, el número 30 es un número libre de cuadrados.

Número ondulado: todo número natural de la forma *ababab*.... Por ejemplo, los números 121 y 13131 son números ondulados.

Número intocable: todo número natural que no es la suma de los divisores propios de ningún número. Por ejemplo, los número 52 y 88 son números intocables.

Existen más tipos, algunos de ellos reciben el nombre de personajes famosos (Fibonacci, Bell, Sophie Germain,...). ¿Te animas a encontrar un número y ponerle tu nombre?

Actividad 9: Lenguaje matemático. La Historia de los números

La matemática tiene, como la mayoría de las ciencias y otras disciplinas del saber, un lenguaje particular, específico, el cual simplifica, en algunos casos, la comunicación, y por otro lado clarifica y designa de una manera exacta, sin posible confusión, sus contenidos. En este lenguaje, que podemos llamar lenguaje matemático, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, tajantemente, demostrando su veracidad y sin permitir ambigüedades.

Todos y cada uno de los símbolos de escritura definidos y utilizados deben ser conocidos por ambos interlocutores y tienen una tarea determinada, exacta, sin solapamientos ni posibles equívocos, mientras que también la estructura de su presentación es idónea para su perfecta comprensión. El desconocimiento del lenguaje matemático produce errores de construcción, de interpretación, y en definitiva hace imposible la comunicación.

9.1. Aritmética y lenguaje numérico.

El objetivo de esta sección es dar una visión histórica de la evolución de los sistemas de numeración y, en menor medida, de los símbolos aritméticos fundamentales, así como un análisis de otros sistemas de numeración que fueron muy importantes a lo largo de la historia de de la humanidad

A lo largo de toda la película hemos observado, y enlazado con el desarrollo de los personajes, un personaje mudo, las matemáticas, nexo de unión entre los principales protagonistas. El lenguaje escrito que utilizan está lleno de caracteres incomprensibles, salvo para aquellos que conozcan el idioma japonés, y sólo a través de los subtítulos podemos conocer realmente a lo que se están refiriendo los personajes de la historia.

Actividad 1. Resuelve el siguiente problema

- I bought 2 handkerchiefs and 2 pairs of socks by 380 yens. Those same handkerchiefs and 5 pairs of socks cost 710 yens. How much does each item cost?
- J'ai acheté 2 mouchoirs et 2 paires de chaussettes par 380 yens. Ces mêmes mouchoirs et 5 paires de chaussettes coûtent 710 yens. Combien ça coûte chaque chose?
- Ich habe 2 Taschentücher und 2 Paare Socken durch 380 Yene gekauft. Dieselben Taschentücher und 5 Paare Socken kosten 710 Yene. Wie viel kostet jede Sache?
- Я купил 2 платка и 2 пары носков за 380 иен. Эти же самые платки и 5 пар носков стоят 710 иен. Сколько стоит каждая вещь?
- 私は380円の2通りマフラーと靴下の2ペアを買った。同じ組織や靴下の5ペア710円かかります。すべてはどのくらいですか？
- اشتريت 2 الأوشحة و2 زوج من الجوارب ل380 ينا. نفس الأنسجة و 5 أزواج من الجوارب بتكلفة 710 ينا. كم هو كل شيء؟

¿Lo reconoces? Es el problema de los deberes de Raíz:

- Compré 2 pañuelos y 2 pares de calcetines por 380 yenes. Esos mismos pañuelos y 5 pares de calcetines cuestan 710 yenes. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

El mismo problema se ha planteado en distintos idiomas pero, ¿cómo sería la respuesta?

- Subtract the second amount from the first one to know how much the socks cost:

  $$710 – 380 = 330 \text{ yens}$$

  then, a handkerchief is valued:

  $$330/3 = 110 \text{ yens}$$

  Now, it is easy to find how much the handkerchiefs cost, we subtract the price of tth pair of socks from the first amount:

  $$710 – 2 \cdot 110 = 490 \text{ yens}$$

  and we obtain the price of both handkerchiefs. Thus, a handkerchief costs:

  $$490/2 = 245 \text{ yens}$$

- Soustraire le deuxième montant de la première à savoir combien le coût des chaussettes :

710 – 380 = 330 Yens

ensuite, un mouchoir coûte :

330/3 = 110 Yens

Il est facile de trouver combien le coût des mouchoirs, on soustrait le prix de la paire de chaussettes au premier achat:

710 – 2 · 110 = 490 Yens

et nous obtenons le prix de deux mouchoirs. Ainsi, un mouchoir coûte:

490/2 = 245 Yens

- Мы уменьшаем первую покупку второй и знаем, сколько стоят три пары носков:

  710 – 380 = 330 иен

  потом платок стоит:

  330/3 = 110 иен

  Сейчас легкий замечать, сколько стоят платки, мы уменьшаем цену двух пар носков в первую покупку:

  710 – 2 · 110 = 490 иен

  и мы получаем цену двух платков. Так, платок стоит:

  490/2 = 245 иен

- 2番目の最初の購入を減算して知っているどのくらいの靴下の3つのペア：
  710から380 = 330円
  組織しています：
  330 / 3 = 110円
  それはどれだけのスカーフを見つけるには、最初の2つのペアの靴下を購入する費用を引くのは簡単だ：
  710 - 2 110 = 490円
  と我々は2つの組織のコストを入手してください。このように、ハンカチです：
  490 / 2 = 245円

- طرح أول عملية شراء للثانية ، ونحن نعلم مدى ثلاثة أزواج من الجوارب :
  710 -- 380 = 330 ين
  ثم الأنسجة :
  330 / 3 = 110 ين
  الآن من السهل العثور على مدى والأوشحة ، وطرح تكلفة وزوجين من الجوارب لأول عملية شراء :
  710 -- 2 110 = 490 ين
  ونحصل على تكلفة هذين الأنسجة. وهكذا ، منديل هو :
  490 / 2 = 245 ين

- Restamos la primera compra de la segunda y sabemos cuánto cuestan tres pares de calcetines:

  710 – 380 = 330 yenes

  luego un pañuelo cuesta:

  330/3 = 110 yenes

  Ahora es fácil hallar cuánto cuestan los pañuelos, restamos el coste de dos pares de calcetines a la primera compra:

  710 – 2 · 110 = 490 yenes

  y obtenemos el coste de los dos pañuelos. Así, un pañuelo cuesta:

  490/2 = 245 yenes

Seguimos observando palabras extrañas, símbolos raros e incluso en un idioma se escribe de derecha a izquierda. No obstante, hay algo que llama la atención:

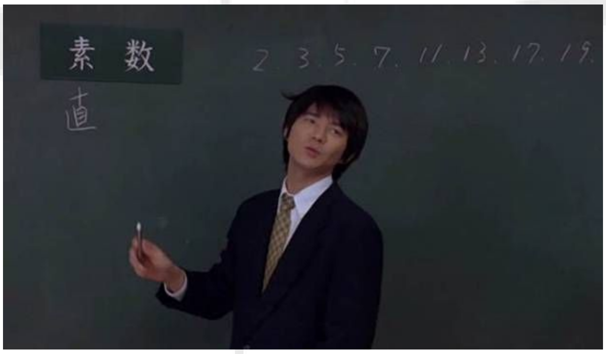
Los cálculos matemáticos se representan de igual modo en todos ellos

Podríamos hacer la experiencia de no presentar los subtítulos y, teniendo unos conocimientos mínimos de aritmética, podríamos intuir rápidamente sobre lo que estamos trabajando, como hemos visto en la actividad 1. Esta es una de las primeras cuestiones que nos llaman la atención. Pues a pesar de estar utilizando el lenguaje escrito en un idioma distinto al nuestro:

一、二、三、四、五、六、七、八、九、十

ichi – ni – san – shi – go – roku – shichi – hachi – kû – jû

cuando realizan cálculos aritméticos, el sistema de numeración es idéntico al que conocemos. Observa la escena en la que Raíz escribe los números primos en la pizarra (minuto 11:45 al 13:18)



Los números aunque pronunciados de forma extraña para nosotros,
se escriben y se operan de la misma forma

Estamos habituados desde nuestros primeros años escolares a reconocer, junto con las cifras, una serie de símbolos aritméticos tales como el de la suma (+) y la multiplicación (x), etc. Muchos pensarán que estos símbolos son tan antiguos como las letras o tal vez como los propios números. Estos símbolos tan habituales surgen de la necesidad humana para expresar de un modo práctico y entendible por todo el mundo, contenidos y mensajes complejos, y esto se ha conseguido tras años y años de evolución.

A nivel histórico, uno de los mayores problemas para las primeras culturas fue contar y establecer un sistema para ello. Inventar un sistema de numeración no fue una tarea fácil. Al retirarse los glaciares hace unos 10.000 años, los cazadores nómadas de la edad de Piedra se reunieron paulatinamente en los Valles del Nilo, Tigris y Eúfrates y se dedicaron a la agricultura. Inmediatamente el campesino tuvo que afrontar varios problemas como el de contar los días y las estaciones, el de saber cuándo tenía que plantar y qué cantidad de semillas tenía que guardar, el de pagar tributos, ... Todo esto hizo que fuera preciso darle nombre a los números.

Los últimos datos históricos parecen evidenciar que la escritura de los números comenzó en Elam, tierra perteneciente al actual Irán, 4.000 años antes de Cristo. Allí se creó un rudimentario sistema de símbolos cuneiformes para representar algunos números que luego fue adoptado por los sumerios de la Baja Mesopotamia. A este último pueblo le corresponde el honor de haber creado las cifras más antiguas de la historia, antes incluso de la aparición de la escritura.

Los sistemas de recuento más primitivos se basaban en el 5, el 10 o el 20, hecho que tiene mucho que ver con los cinco dedos que el animal humano tiene en cada mano, o los 10 dedos de ambas, o los 20 si se toman manos y pies, pero ha habido muchas excepciones. Ciertas culturas aborígenes de Africa, Australia y América del Sur emplearon un sistema binario. Unas cuantas desarrollaron un sistema ternario; se dice que una tribu brasileña contaba con las tres articulaciones de las falanges de los dedos. El sistema cuaternario, es decir, de base cuatro, es todavía más excepcional, y ha estado confinado principalmente a unas pocas tribus sudamericanas y a los indios Yuki de California, quienes contaban con los huecos de separación de los dedos.

De entre todas ellas destacan los sistema duodecimal y sexagesimal. Puede tener que ver con contar tres falanges por dedo del índice al meñique (12 unidades), usando el pulgar para llevar la cuenta del número de falanges y los dedos de la otra mano una vez completada cada vuelta de doce. Una simple multiplicación proporciona:

$$12 \cdot 5 = 60$$

y se encuentra en el origen de:

- las 24 horas del día (12 para el día y otras 12 para la noche).
- 60 minutos en una hora y 60 segundos en un minuto.

Actividad 2 Ahora vamos a hacer el indio

- Intenta contar hasta 35 con el sistema de los indios Yuki. ¿Qué problemas encuentras?
- Todos hemos sumado y restado alguna vez utilizando los dedos de las manos, vamos a realizar la misma operación con el sistema Yuki,
  - suma 7 + 3,
  - resta 18 – 7.

  ¿Te parece este un sistema original de contar?
- Igual que cuando contamos con los dedos, ¿qué le ocurre a este sistema de conteo cuando necesito contar un numero como 1234?
- Supón que vives en los tiempos primitivos y no conoces los números,
  - ¿cómo sabrías que las ovejas que sacas a pacer son las mismas que las que traes?
  - Inventa una manera de contar.
  - Si tuvieses que representar una cantidad muy grande, ¿con qué dificultad te encontrarías?
  - Trata de inventar otro sistema que te facilite esta tarea.

9.2. Historia de nuestro sistema de numeración

Actualmente se define un sistema de numeración como un **conjunto de símbolos y reglas de generación que permiten construir todos los números** válidos en el sistema. A estos símbolos se les conoce como **cifras** o **guarismos**.

Existen básicamente tres tipos de sistemas de numeración:

1. Los sistemas de numeración con **notación posicional** que, dependiendo de dónde se encuentre situada la cifra, ésta tiene un significado u otro; no es lo mismo 010 que 100.
2. Los sistemas de numeración con **notación aditiva**. Es aquel sistema en el que el principio básico es la repetición de guarismos.
   Un ejemplo es el que utilizamos en el conteo de datos, escribimos IIIII IIIII IIIII ..., vamos realizando bloques de 5 palitos y después realizamos el recuento final.

Otra clasificación puede hacerse dependiendo del numero de cifras que utilicemos:

1. El **sistema binario** de los ordenadores sólo utiliza dos cifras el 0 y el 1.
2. El **sistema sexagesimal** utilizado en la antigua Mesopotania, del que hablamos antes, usaba 60 símbolos.
3. El **sistema decimal**, que utiliza 10 guarismos {0,1,2,3,4,5,6,7,8 y 9}.

Nuestro actual sistema de numeración es de origen hindú y cuajó durante el periodo de esplendor cultural e intelectual que tuvo lugar en todo el valle del Ganges desde mediados del siglo III d.C. hasta mediados del siglo VI d.C. El sistema de numeración hindú se basa en el principio posicional y el uso del cero.

El sistema es decimal, tiene base 10, por lo que además del 0 se usan otras 9 cifras más. El valor de cada una de estas cifras depende del lugar que ocupa en el número. Así, cuando escribimos 444, la cifra 4 toma tres valores distintos: el primer 4 vale 400, el segundo 4 vale 40 y el tercero vale 4.

Sin duda alguna, **la cifra más importante** y que da significado a todo el sistema es el 0 (**cero**). Un símbolo para representar la nada, pero esa idea es precisamente la que hace funcionar al sistema de numeración posicional.
Si no dispusiéramos del cero: ¿cómo podríamos representar un número compuesto por exactamente 2 centenas y 5 unidades? El cero nos permite indicar que no hay decenas en ese número: 205.

Este sistema permite escribir cualquier número, por grande que sea. Puesto que hay infinitos números, poder escribir cualquiera de ellos de manera sencilla y usando sólo diez símbolos es un logro intelectual realmente prodigioso.
Todo número por lo tanto podrá ser escrito en base 10 de una forma similar al ejemplo:

$$7.103.256 = 7 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

Interpretando la escritura numérica podemos decir que el numero representa decir 6 unidades, 5 decenas, 2 centenas, 3 unidades de millar ,0 decenas de millar, 1 centena de millar y 7 unidades de millón.

Para escribir estas diez cifras, a partir de las cuales se puede representar cualquier número, los hindúes tuvieron la buena idea de no usar letras de su alfabeto. Usaron símbolos que derivaban de la escritura brahmi, surgida en el sigo III a.C. para escribir el sánscrito. La cifras brahmi evolucionaron y se diversificaron dando lugar en el sigo IV y V a las cifras Gupta y a partir del siglo VII a las nagari, que fueron las que tomaron inicialmente los árabes.

Tras su conversión al Islam en el siglo VI, los árabes iniciaron una expansión hacia el Oriente que los llevó a territorio hindú. A través de esa frontera se filtró el sistema hindú de numeración, de forma que ya a finales del siglo VIII los musulmanes lo habían asimilado. Esta forma de representar los números que los árabes aprendieron en el Oriente circuló hasta la otra punta de sus dominios; y así, a través del norte de África, el sistema de numeración hindú llegó a España en el siglo IX. Además de los musulmanes, los mercaderes y comerciantes judíos pudieron también tener un papel importante en esta trashumancia que llevó los números del Oriente al Occidente.

Durante este periodo se produjo una batalla entre “algoristas”, esto es, aquellos que usaban para las cuentas el sistema hindú de numeración y los numerales árabes, y “abacistas”, es decir, aquellos que hacían las cuentas con el viejo sistema romano mejorado con artilugios como el ábaco o las mesas de cálculo.
Lo que al inicio del Renacimiento vino a decantar la victoria del lado de los “algoristas” frente a los “abacistas” fue, ni más ni menos, que el desarrollo del comercio. Esta transformación de la actividad comercial y la aparición de las primeras entidades bancarias, generó una contabilidad mucho más complicada que requirió entonces de los poderosos métodos de cálculo que la aritmética hindú permitía, pero por otro lado hizo imprescindible la simplificación de las operaciones aritméticas que permite el sistema hindú. Así la aritmética hindú escrita con cifras árabes se dieron impulso mutuo en Europa a partir del siglo XIII.

Actividad 3: Nuestro sistema de numeración

1. Una persona sin duda fue fundamental en la transmisión del sistema de numeración hindú hasta occidente el ilustre algebrista Al-Khowarizmi. Utilizando los recursos necesarios haz una breve nota biográfica sobre este matemático.
   a) Señala las respuestas correctas: “nuestro sistema de numeración actual se basa en:
      - Una base decimal.
      - Un numero ilimitado de símbolos.
      - Podemos obtener números impares.
      - Una notación posicional.
      - Un símbolo especifico para cada una de los diez cifras básicas.
      - Descomposición de números.

   b) ¿Por qué crees que los occidentales escogimos un sistema decimal?
   c) Completa el cuadro:

	Unidades millón	Centenas millar	Decenas millar	Unidades millar	Centenas	Decenas	Unidades
45							
678965							
45004							
9640056							

   Basándote en el cuadro, expresa los números como suma de potencias de 10. ¿Conoces algo en la vida cotidiana que “funciona” de forma parecida?

2. Taller el Ábaco.
   a) Busca información de:
      - ¿Cómo se usa el Ábaco?
      - ¿Dónde se utilizó?
      - ¿Es utilizado actualmente?

   b) Utilizando un Ábaco escribe los números anteriores.

9.3. Historia de nuestros símbolos aritméticos

¿Cómo expresar mediante símbolos que dos números van a ser sumados, multiplicados o divididos? Ya los babilonios y egipcios habían inventado ideogramas para indicar cuando dos cantidades se sumaban o restaban. Especialmente gráfico era el signo egipcio: un par de piernas caminando hacia delante indicaban una suma y caminando hacia atrás una resta.

En las primeras aritméticas mercantiles publicadas en el Renacimiento se optó por declarar con palabras la operación que se iba a hacer con los números. Pero este exceso retórico era engorroso y confuso. En Italia y otros países se optó, desde finales del siglo XV hasta principios del XVII, por indicar las operaciones mediante abreviaturas: así, la letra tildada "*p*", inicial de *plus* y la "*m*", inicial de *minus*, se usaron para señalar sumas y restas, respectivamente, y una "*r* "era el signo habitual para la raíz cuadrada.

Pero fueron los rechenmeisters de la Hansa quienes mostraron más imaginación en el diseño de los símbolos de la aritmética. Mientras cuadraban balances contables en sus oscuras oficinas de los muelles, cayeron en la cuenta de que para indicar sumas y restas acaso pudieran servir aquellos signos usados en el puerto para indicar excesos o mermas en los pesos de las cajas y embalajes. Estos símbolos no eran otros que la cruz + para indicar un exceso y el guión – para indicar una merma.
Así, algunos rechenmeister empezaron a usar esos símbolos hacia el final del siglo XV para indicar con el + una suma y con el – una resta en sus balances contables. Primero los usaron en textos manuscritos; después los símbolos pasaron a la imprenta y acabaron con el tiempo haciéndose universales.

Parece inverosímil, pero mientras los griegos ya trabajaban con las fracciones de manera primorosa antes de Cristo, no es hasta el renacimiento, donde aparece por primera vez la idea de un número negativo. Conforme el siglo XVI se desperezaba, los signos + y – se hicieron de uso común en las aritméticas publicadas en Alemania por los reichenmeisters. A estos signos, Christoph Rudolff, otro reichenmeister, añadió el símbolo de la raíz cuadrada √. El símbolo acaso derive de una deformación de la letra *r*, inicial de la palabra latina *radix* que, cuando el número sobre el que actuaba era demasiado largo se alargaba hasta cubrirlo por completo.

Hasta finales del siglo XVI no se acabaría comprendiendo la importancia del desarrollo decimal para facilitar los cálculos aproximados con números racionales e irracionales. El impulsor del invento fue Simon Stevin, de Brujas, que escribió un librito en flamenco titulado ***The thiende*** – algo así como *El arte decimal*–, aparecido en 1585, donde explicaba el procedimiento. Stevin también propuso la unificación de pesos, medidas y monedas, idea que no se haría realidad hasta que la Revolución Francesa pusiera en marcha el sistema métrico decimal, y hace unos años con la llegada del euro.

La simbología para las operaciones de la aritmética se completó en el siglo XVII. Fue en 1631 cuando el inglés William Oughtred popularizó el uso del aspa "x" para indicar una multiplicación, si bien a otros no les gustaba demasiado. Leibniz escribió a John Bernoulli en 1698: "no me gusta como símbolo para la multiplicación, pues se confunde demasiado fácilmente con 'x' … a menudo relaciono dos cantidades con un punto interpuesto". Sin embargo, y aunque ahora lo pongamos en el medio de la línea, originalmente se ponía abajo, como el de puntuación.

Pero las más cristalina de todas las invenciones de símbolos para la aritmética la hizo el inglés Robert Recorde que consiguió justificar su invención de forma aguda y proverbial. Recorde eligió dos pequeñas rayas paralelas = como signo para la igualdad, porque «no hay dos cosas que puedan ser más iguales».

Los números que los árabes trajeron al Occidente desde la India son hoy día universales: los escribimos de igual forma en Japón, España, Australia, Egipto, México o Iraq. Y los seguimos enseñando casi de la misma forma que Al-Jwarismi o Fibonacci recomendaron en sus libros, o tal cual prescribieron las aritméticas mercantiles renacentistas. Estas aritméticas, publicadas en su mayoría en las lenguas vulgares, impusieron el patrón que todavía hoy es común en la enseñanza de las cuentas: comenzaban (y comenzamos) instruyendo en las cuatro reglas básicas, suma, resta, multiplicación y división, para pasar después a los números quebrados y la regla de tres y, eventualmente, a temas más avanzados como los cálculos de raíces cuadradas, cúbicas, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, etcétera.

Todos los sistemas de numeración posicional se basan en el **Teorema Fundamental de la Numeración**. Este teorema establece la forma general de construir números en un sistema de numeración posicional. Primero estableceremos unas definiciones básicas:

- N: Número válido en el Sistema de numeración
- b: base del sistema de numeración. Número de símbolos permitidos en el sistema.
- d: un símbolo cualquiera de los permitidos en el sistema de numeración
- n: número de dígitos de la parte entera.
- ,: coma fraccionaria. Símbolo utilizado para separar la parte entera de un número de su parte fraccionaria.
- k: número de dígitos de la parte decimal.

La fórmula general para construir un número (cualquier número) N en un sistema de numeración posicional de base b es la siguiente:

$$N = d_n \dots d_1 d_0, d_{-1} \dots d_{-k} =$$

$$d_n \cdot b^n + \dots + d_1 \cdot b^1 + d_0 \cdot b^0, +d_{-1} \cdot b^{-1} + \dots + d_{-k} \cdot b^{-k} =$$

$$N = \sum_{i=-k}^{n} d_i \cdot b^i$$

El valor total del número será la suma de cada dígito multiplicado por la potencia de la base correspondiente a la posición que ocupa en el número.

9.4 Sistemas de numeración históricos

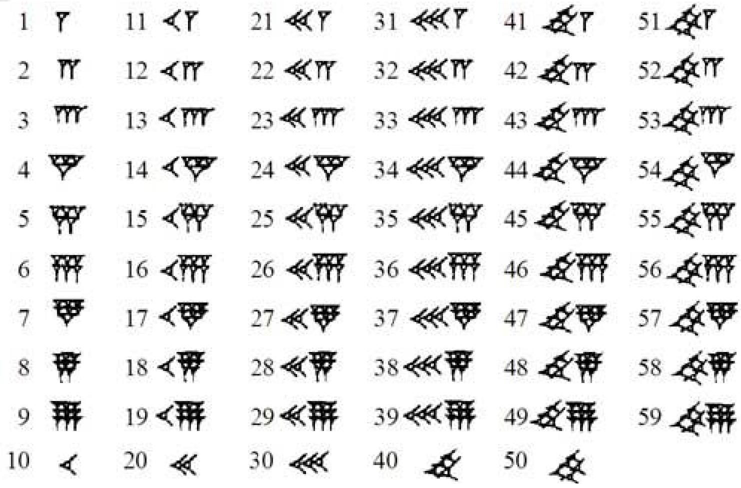
Realmente nuestro sistema de numeración es muy actual, si observamos que a la lo largo de la historia de la humanidad han existido numerosos sistemas de numeración.

Vamos a hacer un rápido repaso histórico a algunos de los sistemas de numeración históricos mas conocidos

9.4.1. El Sistema de Numeración Babilonio

Entre la muchas civilizaciones que florecieron en la antigua Mesopotamia se desarrollaron distintos sistemas de numeración. Antes de la era cristiana, se inventó un sistema de base 10, aditivo hasta el 60 y posicional para números superiores.

Para la unidad se usaba la marca vertical que se hacía con el punzón en forma de cuña.
Se ponían tantos como fuera preciso hasta llegar a 10, que tenía su propio signo.
De este se usaban los que fuera necesario completando con las unidades hasta llegar a 60.
A partir de ahí se usaba un sistema posicional en el que los grupos de signos iban representando sucesivamente el número de unidades, 60, 60x60, 60x60x60 y así sucesivamente.

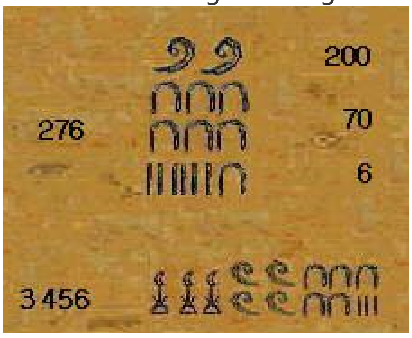


9.4.2. El Sistema de Numeración Egipcio

Los egipcios tuvieron un sistema de numeración antes del año 3000 antes de J.C. este pueblo tuvo ciudades prósperas y sus conocimientos matemáticos fueron debidos a las continuas inundaciones que sufrían. Los sistemas de numeración eran necesarios para los comerciantes y el gobierno, para hacer sus anotaciones y cálculos. No les preocupó la resolución teórica ni la reflexión sobre problemas matemáticos (numéricos, aritméticos o geométricos), sino su inmediata aplicación práctica

Desde el tercer milenio a.c. usaron un sistema describir los números en base diez utilizando los jeroglíficos de la figura para representar los distintos ordenes de unidades. El sistema de numeración egipcio era un sistema decimal (de base 10) por yuxtaposición, así sus números se escribían de la siguiente manera:

Se usaban tantos de cada uno como fuera necesario y se podían escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso. Al ser indiferente el orden se escribían a veces según criterios estéticos, y solían ir acompañados de los jeroglíficos correspondientes al tipo de objeto (animales, prisioneros, vasijas etc.) cuyo número indicaban. En la figura aparece el 276 tal y como figura en una estela en Karnak.

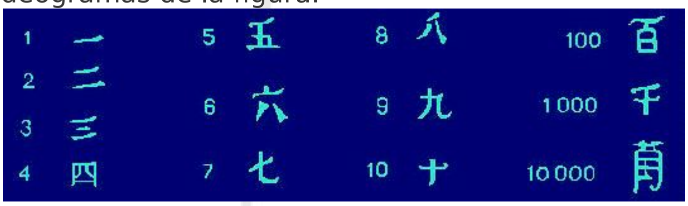


Estos signos fueron utilizados hasta la incorporación de Egipto al imperio romano. Pero su uso quedó reservado a las inscripciones monumentales; en el uso diario fue sustituido por la escritura hierática y demótica, formas más simples que permitían mayor rapidez y comodidad a los escribas

En estos sistemas de escritura los grupos de signos adquirieron una forma propia, y asi se introdujeron símbolos particulares para 20, 30, …, 90, …, 200, 300, …, 900, 2000, 3000, … con lo que disminuye el número de signos necesarios para escribir una cifra.

9.4.3. El Sistema de Numeración Chino

La forma clásica de escritura de los números en China se empezó a usar desde el 1500 A.C. aproximadamente. Es un sistema decimal estricto que usa las unidades y los distintas potencias de 10. Utiliza los ideogramas de la figura:



y usa la combinación de los números hasta el diez con la decena, centena, millar y decena de millar para según el principio multiplicativo representar 50, 700 ó 3000. El orden de escritura se hace fundamental, ya que 5 10 7 igual podría representar 57 que 75. Tradicionalmente se ha escrito de arriba abajo aunque también se hace de izquierda a derecha como en el ejemplo de la figura.

No es necesario un símbolo para el cero, siempre y cuando se pongan todos los ideogramas, pero aún así a veces se suprimían los correspondientes a las potencias de 10.

Aparte de esta forma que podríamos llamar canónica se usaron otras. Para los documentos importantes se usaba una grafía más complicada con objeto de evitar falsificaciones y errores. En los sellos se escribía de forma más estilizada y lineal y aún se usaban hasta dos grafías diferentes en usos domésticos y comerciales, aparte de las variantes regionales. Los eruditos chinos por su parte desarrollaron un sistema posicional muy parecido al actual que, desde que incorporó el cero por influencia india en s. VIII, en nada se diferencia de este.

9.4.4. El Sistema de Numeración Griego

El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 A.C. Era un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades.
Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5, 10 y 100 las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (pente), diez (deka) y mil (khiloi). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico.

Los símbolos de 50, 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10, 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo. Progresivamente este sistema ático fue reemplazado por el jónico, que empleaba las 24 letras del alfabeto griego junto con algunos otros símbolos según la tabla siguiente:

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	θ	90	ϙ	900	ϡ

De esta forma los números parecen palabras, ya que están compuestos por letras, y a su vez las palabras tienen un valor numérico, basta sumar las cifras que corresponden a las letras que las componen.

Esta circunstancia hizo aparecer una nueva suerte de disciplina mágica que estudiaba la relación entre los números y las palabras. En algunas sociedades como la judía y la árabe, que utilizaban un sistema similar, el estudio de esta relación ha tenido una gran importancia y ha constituido una disciplina aparte: la *kábala*, que persigue fines místicos y adivinatorios.

9.4.5. El Sistema de Numeración romano

El sistema de numeración romana se desarrolló en la antigua Roma y se utilizó en todo su imperio. Es un sistema de numeración no posicional, en el que se usan algunas letras mayúsculas como símbolos para representar los números.

Este sistema utiliza siete símbolos para representar los números:

I = 1 – X = 10 – C = 100 – M = 1.000

sólo pueden ser repetidos consecutivamente hasta tres veces.

V = 5 – L = 50 – D = 500

no se repiten.

En este sistema tiene importancia el orden de los símbolos, es decir, para representar un número se debe tomar en cuenta la posición donde se escribe determinado número.

- **Principio aditivo**: un símbolo escrito a la derecha de otro de igual o mayor valor le suma a este su valor. VI = 6 LX = 60
- **Principio sustractivo**: un símbolo ubicado a la izquierda de otro de mayor valor le resta a este su valor. IV = 4 XC = 90
- **Principio multiplicativo**: una rayita horizontal, escrita sobre un número lo multiplica por mil. $\overline{X}$ = 10 · 1.000 = 10.000.

Sus agrupamientos se hacen de 10 en 10, pero los romanos no tenían un símbolo para representar el cero.

Aritmética con números romanos

Todas las operaciones aritméticas realizadas con números romanos, al tratarse de un caso particular de numeración entera, pueden ser descompuestas en sumas y restas.

Ejemplo 1: Suma CXVI + XXIV

Paso	Descripción	Ejemplo
1	Eliminar la notación substractiva	IV → IIII
2	Concatenar los términos	CXVI + XXIIII → CXVIXXIIII
3	Ordenar los numerales de mayor a menor	CXVIXXIIII → CXXXVIIIII
4	Simplificar el resultado reduciendo símbolos	IIIII → V; VV → X; CXXXVIIIII → CXXXX
5	Añadir notación substractiva	XXXX → XL
6	Solución	CXL

Solución: CXVI + XXIV = CXL

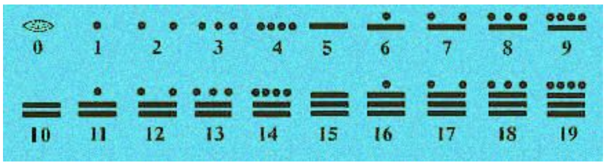
- El primer paso decodifica los datos posicionales en una notación única, lo que facilita la tarea aritmética.
- Con ello, el segundo paso, al tener una notación únicamente aditiva puede entrar en funcionamiento.
- Tras eso, es necesaria una reordenación, pues los dos sumandos mantienen sus ordenaciones respectivas, lo que no es problema al no estar presente anotación substractiva.
- Una vez reordenados los símbolos, se agrupan los símbolos y se introduce de nuevo la notación substractiva, aplicando las reglas de numeración romana.

Ejemplo 2: Resta CXVI − XXIV =

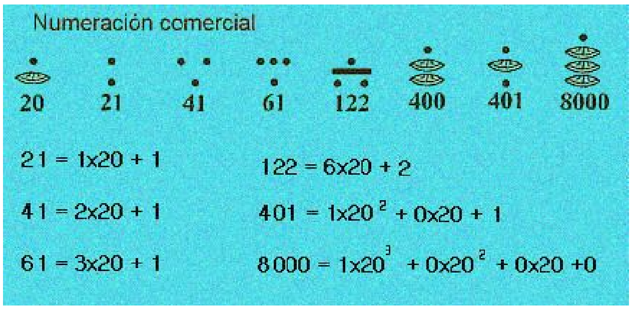
Paso	Descripción	Ejemplo
1	Eliminar la notación substractiva	IV → IIII
2	Eliminar los numerales comunes entre los términos	CXVI − XXIIII → CV − XIII
3	Expandir los numerales del primer término hasta que aparezcan elementos del segundo.	CV − XIII → LLIIIII − XIII → LXXXXXIIIII − XIII
4	Repetir los pasos 2 y 3 hasta que el segundo término quede vacío	LXXXXXIIIII − XIII → LXXXXII
5	Añadir notación substractiva	LXXXXII → XCII
6	Solución	XCII

Solución: CXVI − XXIV = XCII

9.4.6. El Sistema de Numeración Maya



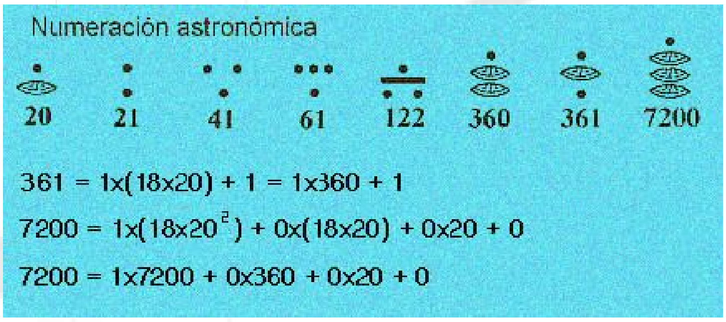
Los mayas idearon un sistema de base 20 con el 5 como base auxiliar. La unidad se representaba por un punto. Dos, tres, y cuatro puntos servían para 2, 3 y 4. El 5 era una raya horizontal, a la que se añadían los puntos necesarios para representar 6, 7, 8 y 9. Para el 10 se usaban dos rayas, y de la misma forma se continúa hasta el 20, con cuatro rayas.



Hasta aquí parece ser un sistema de base 5 aditivo, pero en realidad, considerados cada uno un solo signo, estos símbolos constituyen las cifras de un sistema de base 20, en el que hay que multiplicar el valor de cada cifra por 1, 20, 20x20, 20x20x20 ... según el lugar que ocupe, y sumar el resultado. Es, por tanto, un sistema posicional que se escribe a arriba abajo, empezando por el orden de magnitud mayor.
Al tener cada cifra un valor relativo según el lugar que ocupa, la presencia de un signo para el cero, con el que indicar la ausencia de unidades de algún orden, se hace imprescindible y los mayas lo usa-

ron, aunque no parece haberles interesado el concepto de cantidad nula. Como los babilonios, lo usaron simplemente para indicar la ausencia de otro número.

Pero los científicos mayas eran a la vez sacerdotes ocupados en la observación astronómica y para expresar los número correspondientes a las fechas usaron unas unidades de tercer orden irregulares para la base 20. Así la cifra que ocupaba el tercer lugar desde abajo se multiplicaba por 20x18=360 para completar una cifra muy próxima a la duración de un año.



El año lo consideraban dividido en 18 *uinal* que constaba cada uno de 20 días. Se añadían algunos festivos (*uayeb*), y de esta forma se conseguía que durara justo lo que una de las unidades de tercer orden del sistema numérico. Además de éste calendario solar usaron otro de carácter religioso en el que el año se divide en 20 ciclos de 13 días.

Al romperse la unidad del sistema, éste se hace poco práctico para el cálculo y aunque los conocimiento astronómicos y de otro tipo fueron notables los mayas no desarrollaron una matemática más allá del calendario.

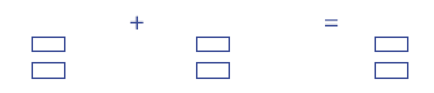
Actividad 4:

1. Escribe en el sistema de numeración maya, griego egipcio y romano:
   a) Tu edad.
   b) El número de tu casa.
   c) La fecha en que estamos.
   d) Número de personas que viven contigo.
2. Escribe los números en el sistema de numeración indicado.
3. Comenta sobre las diferencias y semejanzas entre ellos. Analiza algunos aspectos tales como la economía en la escritura de grandes números.
4. ¿Ves que estos sistemas de numeración son instrumentos útiles para comunicar información?
5. Algunos sistemas de numeración aún se utilizan. Pon ejemplos de la forma y lugar en los que son usados (por ejemplo el romano en las fechas).
6. Inventa un sistema de numeración parecido al griego, con nuestro alfabeto, como el ejemplo que sigue:

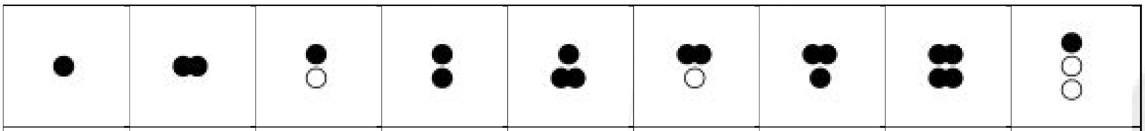
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	T	S	V
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	80	300	800

   Con el sistema de numeración que has inventado, intenta escribir las siguientes cifras: 528, 9461, 703.
7. Sobre la numeración romana:
   a) Pasa al sistema arábigo los siguientes números: XLVI, MMDCCCXLV.
   b) Realiza las siguientes operaciones.

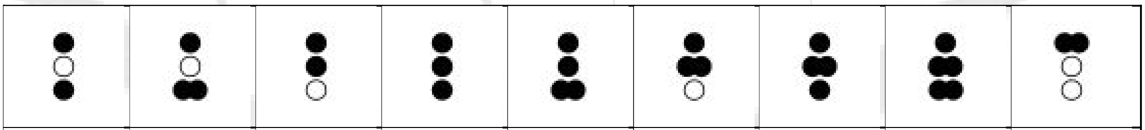
$$\begin{array}{r} \text{XLVI} \\ +\ \text{XXV} \\ \hline \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} \Pi\,\Pi\,\text{III} \\ \Pi\,\Pi\,\text{III} \\ \text{III} \\ +\Pi\,\Pi\,\text{II} \end{array} \quad ,$$



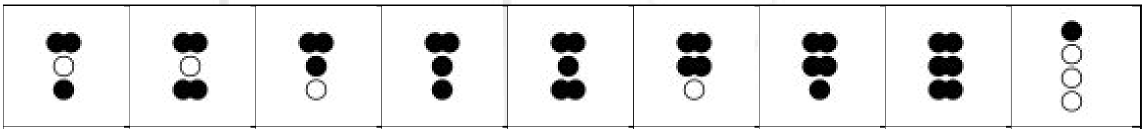
8. ¿Qué diferencias encuentras entre los sistemas de numeración maya y romano?
   a) ¿Cuál te parece mas sencillo?
   b) ¿Cuál mas útil?
9. ¿Por qué crees que se ha adoptado mayoritariamente el sistema de numeración decimal y no otro cualquiera?
10. A través del enlace podrás consultar (si estás interesado) más sobre cómo se operan los números mayas:
    http://html.rincondelvago.com/operaciones-aritmeticas-con-numeros-mayas.html
11. En el cuadro se presentan los primeros números de un sistema desconocido y su equivalencia con los del sistema decimal en notación arábiga.



1	2	3	4	5	6	7	8	9



10	11	12	13	14	15	16	17	18



19	20	21	22	23	24	25	26	27

- ¿Cuántos símbolos se emplean?
- ¿Cómo se ordenan esos símbolos?
- ¿Cuál es la base del sistema?
- ¿Coincide la base con la cantidad de símbolos? ¿Cuáles son las consecuencias de ello?
- ¿Cómo se escribirían los números de tres cifras de la tabla usando números arábigos?

Bibliografía

1. Lecturalia:
http://www.lecturalia.com
2. Revista Unión:
ISSN: 1815-0640. Junio de 2005, Número 2, páginas 15 - 32
http://www.fisem.org/descargas/2/Union_002_004.pdf
3. Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa.
ISSN. 1696-2095. Nº 8, Vol 4 (1) 2006, pp: 47 - 72.
http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/8/espannol/Art_8_96.pdf
4. Universidad de Wheaton – vídeo de Youtube part 1
5. Rosita Garrido Labbé; Santiago, Chile
http://monicarodriguezdiez.wordpress.com
6. El *blog* de sistacnet:
http://sistacnet.info/boletin/
7. Las *webquest*:
http://www.hojamat.es/sindecimales/aula/iniaula.htm#termtriang
http://www.cdu.mic.ul.ie/eurolesson/spanish/maths3c.htm
http://www.telefonica.net/web2/lasmatematicasdemario/Aritmetica/Numeros/Numpol.htm
8. Para los tipos de números:
http://gaussianos.com/tipos-de-numeros/
http://olmo.pntic.mec.es/~dmas0008/perlasmatematicas/tiposdenumeros.htm
http://www.daviddarling.info/encyclopedia/N/numbers_types.html
9. Begoña Arenaz Villalba. Diversidad Cultural. C.A.R.E.I (Centro Aragonés de Recursos para la Educación Intercultural)
http://dl41.dinaserver.com/hosting/carei.es/documentos/matematicas_eso.pdf
10. Dr. J. J. Luetich Los sistemas de numeración. Academia de Ciencias Luventicus
11. Biblioteca Nacional de España
12. La vida de los números
http://www.bne.es/esp/actividades/vidanumeros.htm
13. Santiago Casado
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html#INTRO
14. La Wikipedia:
http://es.wikipedia.org