

UNA REVOLUCIÓN MATEMÁTICA

Como vimos la semana pasada, todos los intentos de demostrar el controvertido *V Postulado* de Euclides resultaron fallidos hasta finales del siglo XVIII. Pero en el siguiente siglo la matemática asistirá a una de sus primeras revoluciones. Tras más de 2.000 años y por primera vez, la indiscutible verdad geométrica de Euclides dejará paso a un sistema geométrico también axiomático, lógicamente impecable pero intuitivamente difícil de asimilar. El hombre, no sin esfuerzos, tuvo que aceptar que hay otros mundos posibles y que como dijo Gauss "la necesidad física de nuestra Geometría Euclídea no puede ser demostrada al menos para la razón humana".

por Lolita Brain

LA INTUICIÓN DE UN GENIO

Carl F. Gauss (1777 -1855) no publicó ningún trabajo definitivo sobre sus ideas acerca de la Geometría No-Euclídea por miedo al ridículo, como él mismo dijo. Sin embargo, con sólo 17 años, le dijo a su amigo Schumacher que pensaba que podía existir una geometría lógica en la que el postulado de las paralelas de Euclides no se cumpliera. Pero él continuó intentando encontrar una demostración del famoso postulado que hiciera compatible lo que él entendía como la geometría de nuestro mundo físico, la euclídea. Desde 1799 se tomó en serio la imposibilidad de demostrar el *V Postulado*, y comenzó a desarrollar lo que él llamó Geometría Antieuclídea o Astral. Su conclusión fue que era lógicamente posible esta *otra* geometría, aun cuando equipado con un teodolito se marchó a medir los ángulos del triángulo formado por los picos Brocken, Hohehagen e Inselberg, buscando medidas que confirmaran que en efecto la suma de los ángulos de un triángulo es de 180° . Su suma excedió en 14° este valor, pero el propio error del instrumento le impidió concluir nada.



Y NACIÓ UNA NUEVA GEOMETRÍA



JÁNOS BOLYAI
1802 - 1860

Como en muchas otras situaciones, la respuesta definitiva a las inquietudes de Gauss vinieron simultáneamente de dos personas que no tuvieron contacto. Un húngaro, János Bolyai, hijo de Wolfgang Bolyai, amigo personal de Gauss, publicó en 1832 el ensayo de 26 páginas *La ciencia del espacio absoluto* como apéndice de un libro de su padre, en el que presentó lo que él llamó Geometría Absoluta.

Lobachevsky, un oficial ruso y rector de la universidad de Kazan, presentó sus puntos de vista en 1826 al departamento de su universidad, pero no fue tomado realmente en serio. En 1829 publicó el artículo *Sobre los fundamentos de la geometría* en una revista de Kazan, por lo que no tuvieron mucha difusión hasta que en 1840 publicó su libro en alemán *Investigaciones sobre la teoría de las paralelas*. Llamó a su geometría Geometría Imaginaria. Ambos autores suponen que el *V Postulado* es falso y, buscando una contradicción que no existe, se convencen de que una nueva teoría es posible.



NIKOLAI IVANOVICH
LOBACHEVSKY
1792 - 1856

LA NECESIDAD DE UN MODELO

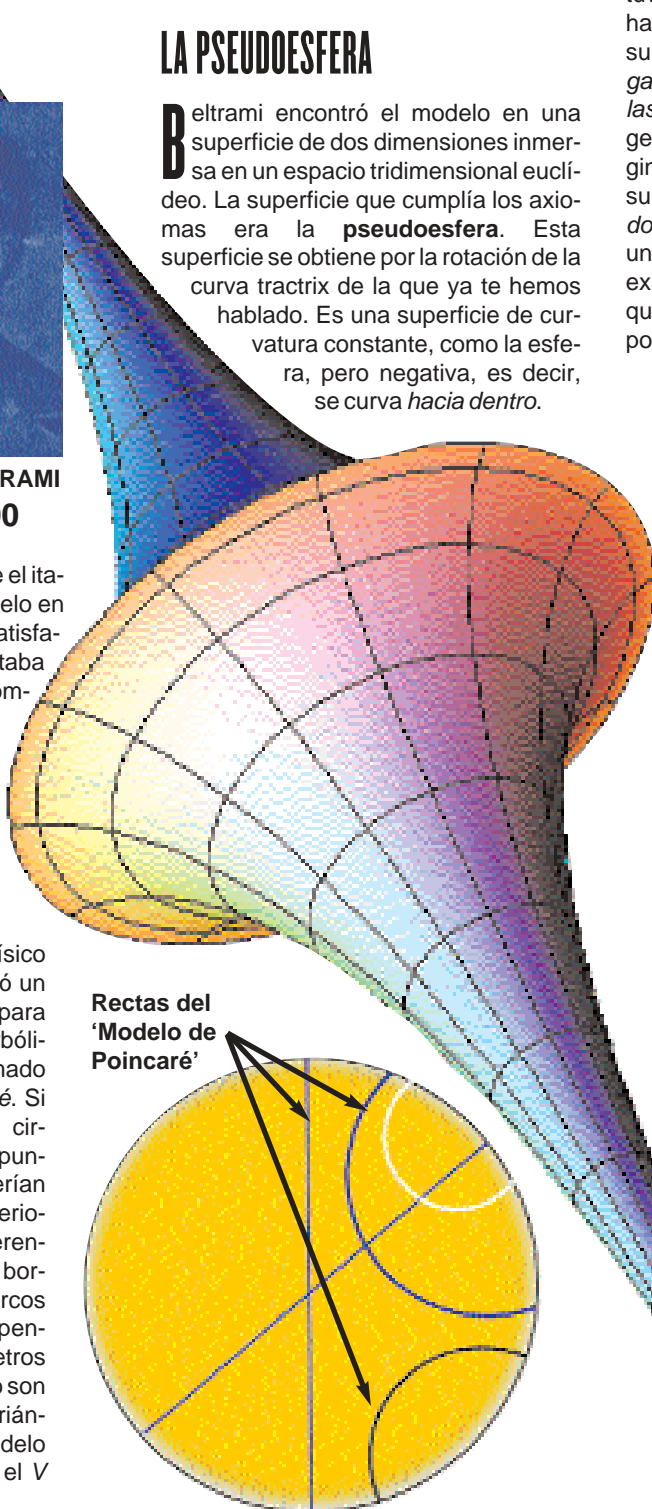
Es importante destacar que ni Bolyai ni Lobachevsky probaron que su nueva geometría era consistente, es decir, que no contenía ninguna contradicción lógica. Pero lo cierto es que tampoco nadie hizo lo propio con la teoría de Euclides. Los cientos de años de utilización de la geometría del alejandrino dejaban fuera de toda sospecha la posibilidad de que fuera inconsistente. La primera persona que puso en paridad ambas teorías fue el italiano Beltrami, quien en 1868 encontró un modelo en el que los axiomas de Bolyai-Lobachevsky se satisfacían. Encontrado un modelo, la consistencia estaba garantizada. Su modelo fue posteriormente completado por Felix Klein.



EUGENIO BELTRAMI
1835 - 1900

LA PSEUDOESFERA

Beltrami encontró el modelo en una superficie de dos dimensiones inmersa en un espacio tridimensional euclídeo. La superficie que cumplía los axiomas era la **pseudoesfera**. Esta superficie se obtiene por la rotación de la curva tractrix de la que ya te hemos hablado. Es una superficie de curvatura constante, como la esfera, pero negativa, es decir, se curva *hacia dentro*.



Rectas del 'Modelo de Poincaré'



JULES HENRI
POINCARÉ
1854 - 1912

EL MODELO DE POINCARÉ

El matemático y físico francés construyó un original modelo para la Geometría Hiperbólica del plano llamado *Modelo de Poincaré*. Si consideramos una circunferencia **C**, los puntos de ese plano serían todos los puntos interiores a dicha circunferencia sin considerar el borde. Las rectas de dicho plano son los arcos interiores de las circunferencias que cortan perpendicularmente a la circunferencia **C** y los diámetros de **C**. Observa que en este modelo las rectas no son rectas sino arcos. Pero en él se pueden trazar triángulos, paralelas, hacer simetrías, etc. Es un modelo artificial de geometría en el que no se cumple el *V Postulado* de Euclides.

¿QUÉ HAY DE NUEVO EN ESTA GEOMETRÍA?

La Geometría No-Euclídea coincide completamente en sus fundamentos con la de Euclides, excepto en el *V Postulado*. La hiperbólica sostiene que por un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas rectas paralelas. Todos los teoremas de Euclides en los que este quinto axioma no interviene siguen siendo válidos en la geometría hiperbólica. En cambio, las proposiciones de Euclides en las que interviene este postulado no son verdaderas en la geometría hiperbólica. Por ejemplo, ahora los ángulos de un triángulo no miden 180° , el área de un cuadrado no es su lado al cuadrado, y un círculo no tiene de superficie πr^2 por el cuadrado de su radio.

La existencia de estos modelos es una prueba de la independencia lógica de los axiomas, es decir, el *V Postulado* no puede demostrarse a partir de los otros. Esto no quiere decir que el espacio que nos rodea no sea euclídeo, sino sólo que, desde el punto de vista lógico, tiene igual coherencia la Geometría Euclídea que la No-Euclídea.

Nuestra vida cotidiana es euclídea pero el espacio relativo no.

