CURVAS Y SUPERFICIES DE NIVEL

UNIDAD	NOMBRE	TEMAS
4	**Funciones vectorial de varias variables**	4.3 Curvas y superficies de nivel.

Gráfica de funciones de dos variables

Existen varias maneras de visualizar una función de dos variables, en esta sección lo haremos mediante una superficie en el espacio tridimensional.

Definición (gráfica de funciones de dos variables)

La gráfica de una función $f : D \subseteq I\!R^2 \rightarrow I\!R$ es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $z = f(x,y)$ y $x \in D$. Es decir,

$$Graf(f) = \{(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$$

Observación :

La gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$ puede interpretarse geométricamente como una superficie S en el espacio de forma tal que su proyección sobre el plano xy es D, el dominio de f. En consecuencia, a cada punto (x, y) en D le corresponde un punto (x, y, z) en la superficie y, a la inversa, a cada punto (x, y, z) en la superficie le corresponde un punto (x, y) en D (figura 1).

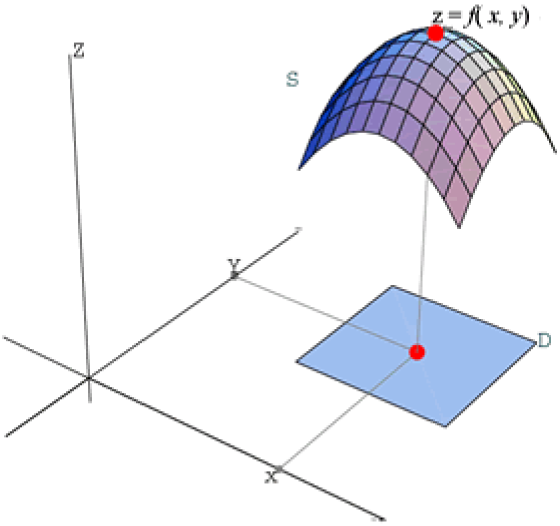

Figura 1

Ejemplo 1

Trace la gráfica de la función n $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$
Solución
La gráfica de esta tipo funciones es muy común y se conocen como paraboloides (figura 2).

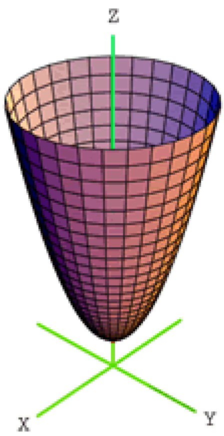

Figura 2.

Observación : el paraboloide anterior $z = x^2 + y^2 + 1$ tiene su eje de simetría paralelo al eje z, es de esperar que un paraboloide como $y = x^2 + z^2 + 1$ tenga su eje de simetría paralelo al eje y.
Ejemplo 2
Trace la gráfica de la función $f(x,y) = -y + 2$.
Solución
Esta es otra de las gráficas que usaremos con mucha frecuencia, se trata de un plano y + z = 2, su gráfica se muestra en la figura 3.

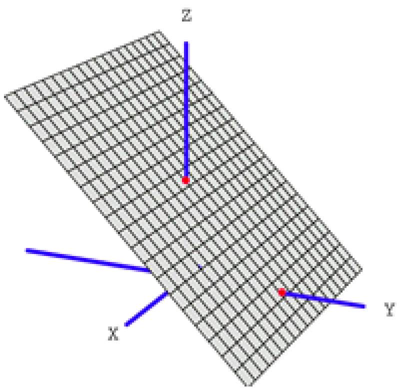

Figura 3.

Superficies

Debido a que muchas de las superficies S con las que trabajaremos no provienen de una función $z = f(x,y)$, es necesario extender nuestra definición de gráfica.

Definición (superficie)

La gráfica de la ecuación $f(x,y,z) = 0$ es el conjunto de puntos $(x,y,z) \in I\!R^3$ tales que satisfacen ésta ecuación. Usualmente nos referimos a la gráfica de una ecuación como una superficie S.

Definición (traza de una superficie)

La traza de una superficie S en el plano P, es la curva que resulta de la intersección entre ambos.

Ejemplo 3

Compruebe que la traza de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 10$$

sobre el plano $y + z = 4$ es una elipse.
Solución

Para hallar la ecuación de la traza debemos resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 10 \\ y + z & = & 4 \end{array} \right.$$

$$z = 4 - y \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 + (4 - y)^2 = 10 \;\Rightarrow\; x^2 + 2\,(y - 2)^2 = 1$$

que resulta ser una elipse:

$$\frac{x^2}{2} + (y - 2)^2 = 1, \quad z = 4 - y$$

No se acostumbra escribir una curva en la forma anterior pues es difícil de manejar, resulta mucho más cómodo y provechoso trabajar con curvas planas o en el espacio, dadas en forma paramétrica. En este caso la curva se puede escribir paramétricamente como:

$$x = \sqrt{2}\cos\theta$$

$$y = \operatorname{sen}\theta + 2$$

$$z = 2 - \operatorname{sen}\theta$$

con $\theta \in [2, \pi]$. La curva y las superficies se muestran en la figura 4.

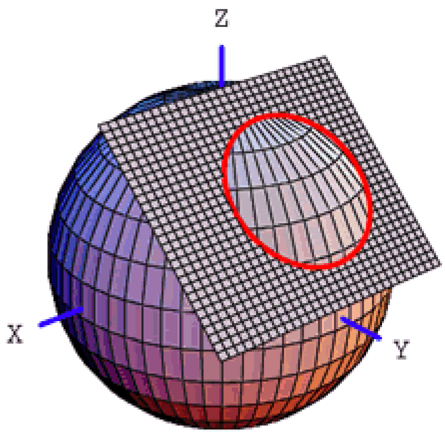

Figura 4

Ejemplo 4

Dibuje las trazas del paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$ sobre los planos $y = c$, para cada $c = -2, -1, 0, 1, 2$.
Solución

En este caso las trazas corresponden a parábolas: $y = \pm c \Rightarrow z = x^2 + c^2 + 1$ es decir:

$$x = t$$

$$y = \pm c$$

$$z = t^2 + c^2 + 1$$

en su forma paramétrica. En la figura 5 se muestran las trazas y la superficie.

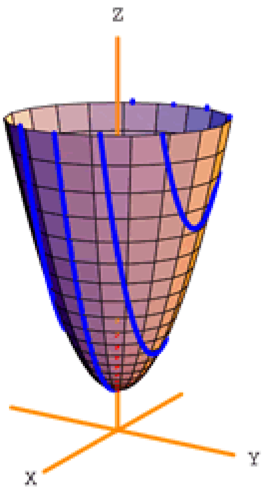

Figura 5.

Otra manera de visualizar una superficie es por medio de sus curvas de nivel o mapas de contorno.

Definición (curvas de nivel)

La proyección perpendicular sobre el plano xy, de la traza de la superficie S sobre el plano $z = k$ se conoce como curva de nivel o línea de contorno. Al conjunto de estas curvas de nivel se le llama mapa de contorno.

Observación: también podemos definir curvas de nivel proyectando sobre el plano coordenado yz. Las trazas de la superficie S sobre el plano $x = k$ o proyectando sobre el plano coordenado xz las trazas de la superficie S sobre el plano $y = k$. Aunque no se acostumbra hacerlo, pueden ser de utilidad al trazar la gráfica de una superficie.

Ejemplo 5

Dibujar un mapa de contorno para el hiperboloide parabólico dado por

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 6.

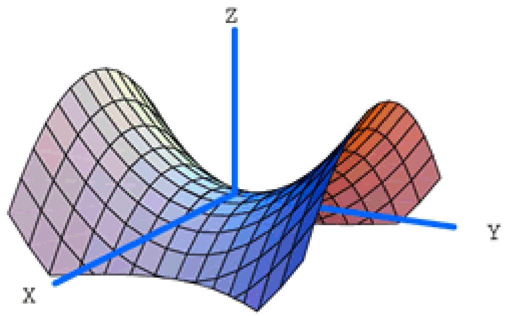

Figura 6.
[Ver en ambiente 3D]

Solución

Para cada valor de k, hacemos $f(x,y)=k$ y dibujamos la curva resultante en el plano xy. Para esto analicemos tres casos :

- Si $k<0$, digamos que $k=-c^2$, entonces

$$y^2-x^2=-c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$

Por tanto las curvas de nivel son hipérbolas con eje transversal horizontal y asíntotas $y=\pm x$.

- Si $k=0$

$$y^2-x^2=0 \Rightarrow y=\pm x$$

- Si $k>0$, digamos que $k=c^2$, entonces

$$y^2-x^2=-c^2 \Rightarrow \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$

Por tanto las curvas de nivel son hipérbolas con eje transversal vertical y así ntotas $y=\pm x$.

El mapa de contorno se muestra en la figura 7.

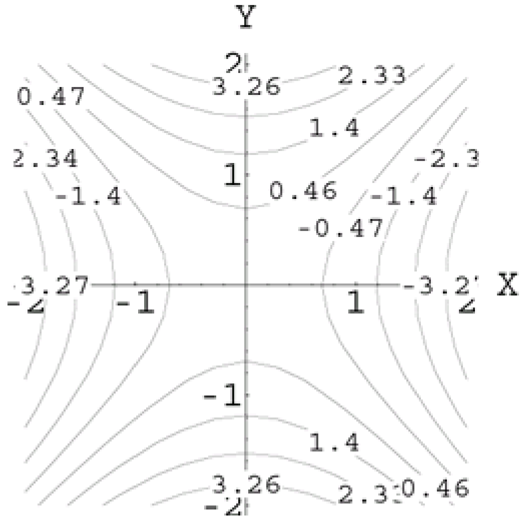

Figura 7.
[Ver en ambiente 3D]

Ejemplo 6

Trazar el mapa de contorno para el paraboloide $z=x^2+y^2+1$

Solución

Vamos a analizar tres casos:

- Si $k>1$, digamos que $k=c^2+1$ con $c\neq 0$, entonces

$$x^2+y^2+1=1+c^2 \Rightarrow x^2+y^2=c^2$$

Entonces las curvas de nivel son círculos con centro en $(0,0)$ y radio r.

- Si $k=1$,entonces

$$x^2+y^2+1=1 \Rightarrow x^2+y^2=0$$

lo cual corresponde al punto $(0,0)$.

- Si $k<1$, digamos que $k=1-c^2$ con $c\neq 0$, entonces

$$x^2+y^2+1=1-c^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2=-c^2$$

Lo cual es imposible y no hay curvas de nivel si se corta con planos por debajo de $z=1$. El mapa de contorno se muestra en la figura 8.

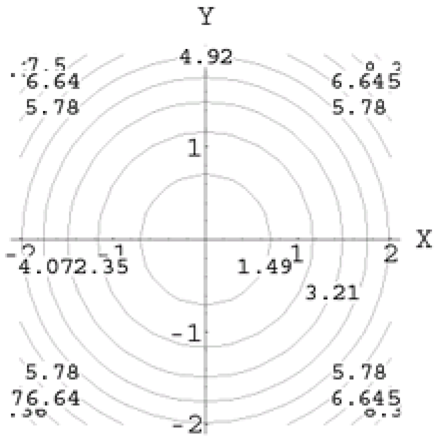

Figura 8.

Observación :

Un mapa de contorno muestra la variación de z con respecto a x e y por el espaciado entre las curvas de nivel. Mucho espacio entre las curvas de nivel indica que z varía lentamente, mientras que un espaciado pequeño indica un cambio rápido en z. Otra cosa importante de notar en la figura 9, es que el radio de la curva de nivel (círculo) es proporcional al valor de k, esto indica que z va creciendo; lo cual concuerda con la forma de la superficie (paraboloide). Un comportamiento contrario indicaría que z decrece. Por otro lado, para proyectar una buena ilusión tridimensional en un mapa de contorno es importante elegir los valores de k de forma que estén espaciados uniformemente.

Ejemplo

En la figura 9 y la figura 10, se muestran algunas curvas de nivel y, en el ambiente 3D, las trazas.

Algunas curvas de nivel para $z=(x-3)^2+(y-3)^2$

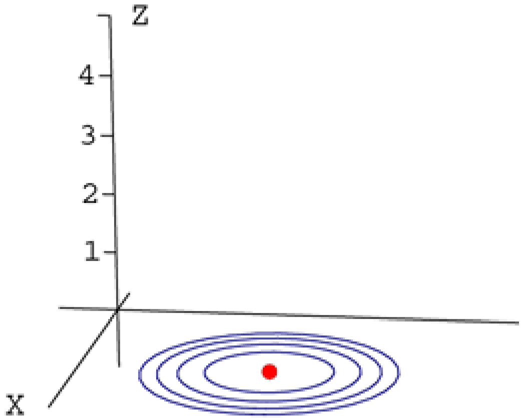

Figura 9.

Algunas curvas de nivel para

$$z = (x-3)^2 - \frac{(y-5)^2}{4}$$

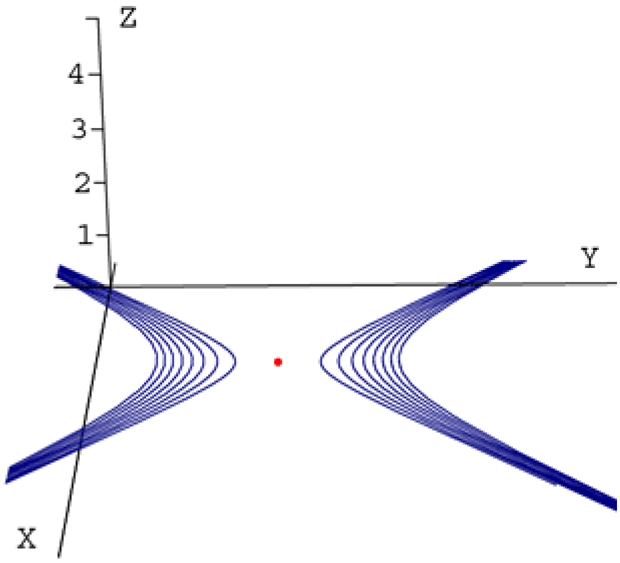

Figura 10

Bibliografía:

Libro: Cálculo Tomo II
Autor: Roland E. Hostetler Robert P.
Editorial: Grupo Editorial Iberoamericano

Libro: Cálculo con Geometría Analítica
Autor: Swokowski Earl W.
Editorial: Grupo Editorial Iberoamericano