Cónicas

Las *cónicas* son curvas planas llamadas elipse, parábola e hipérbola, que pueden ser definidas de diversas maneras. Como caso particular, también tenemos la circunferencia.

El método más antiguo y por el cual reciben el nombre de cónicas, se remonta al siglo III a.c., consiste en considerarlas como intersecciones de un cono circular recto con un plano que no pasa por el vértice (Fig. 1).

Según la posición del plano con el cual se corta, se obtiene una u otra de las tres clases de cónicas. Se pueden obtener varias formas límites, una circunferencia, un punto, rectas que se intersectan, una recta.

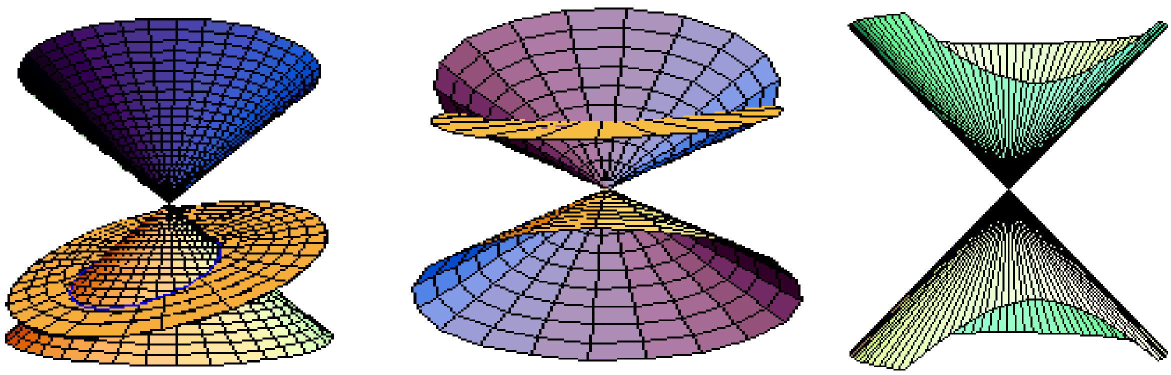

Figura 1: Cono

El matemático griego Menecmo descubrió estas curvas y Apolonio de Perga, otro matemático griego, escribió el libro "Cónicas" un estudio detallado de ellas.

Las cónicas son las curvas más simples después de las rectas. Su consideración es necesaria en el estudio de muchos fenómenos naturales como por ejemplo en las trayectorias de los planetas o de los satélites y de los proyectiles en el vacío.

En este apunte vamos a definirlas por medio de sus propiedades métricas, pero antes recordemos que dados dos puntos del plano $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia entre ellos está dada por

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

1 Elipse

Una *elipse* es el conjunto de puntos del plano para los cuales la suma de las distancias d_1 y d_2 a dos puntos distintos y fijos F_1 y F_2, llamados *focos*, es un valor constante y mayor que la distancia entre los focos.

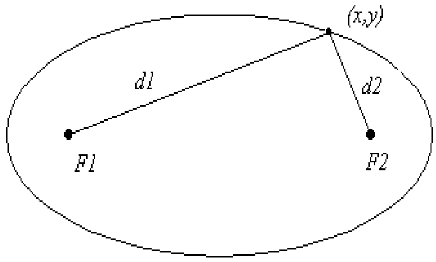

Figura 2: Gráfico de una elipse.

El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama *centro* de la elipse. Observemos que la elipse es simétrica con respecto a la recta que une los focos y a su perpendicular que pasa por el centro.

En la figura 3 se muestra un procedimiento para trazar una elipse: sobre un terreno clavamos dos estacas en F_1 y F_2 y consideremos una cuerda C cuyos extremos están fijos a F_1 y F_2. Desplazando el punzón P, manteniendo tensa la cuerda, obtenemos una elipse.

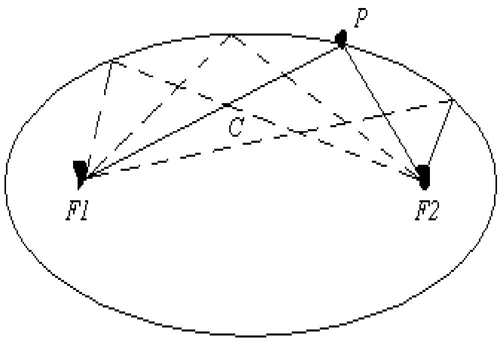

Figura 3: Procedimiento para trazar una elipse.

Hallemos la ecuación de la elipse. Para simplificar, supongamos que $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, con $c > 0$ y llamemos a la contante $2a$, con $a > 0$. Un punto $P = (x, y)$ pertenece a la elipse cuando satisface la ecuación

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

o sea

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a. \tag{1}$$

Ahora, escribamos la ecuación 1 de este modo:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

y elevando ambos miembros al cuadrado, obtenemos:

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2+(x-c)^2+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow$$
$$\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}=4a^2+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\Rightarrow$$
$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente tenemos:

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left((x^2-2cx+c^2)+y^2\right)\Rightarrow$$
$$a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2.$$

Como $2a=d(F_1,P)+d(F_2,P)\geq d(F_1,F_2)=2c$, resulta que $a\geq c>0$. Luego $a^2-c^2\geq 0$.

Entonces, si llamamos $b^2=a^2-c^2$, la ecuación queda en la forma

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{con} \quad \text{a} > \text{b} > 0.} \tag{2}$$

Los puntos $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$ y $(0,-b)$ son los *vértices* de la elipse y a y b son los *semiejes mayor* y *menor* respectivamente.

Si consideramos que los focos están sobre el eje y, equidistantes de $(0,0)$, la ecuación queda

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{con} \quad \text{b} > \text{a} > 0.} \tag{3}$$

Y si la elipse está centrada en un punto (x_0,y_0), su ecuación es

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.} \tag{4}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

$4x^2+y^2=1$ es la ecuación de una elipse:

$$\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y^2}{1}=1.$$

El semieje mayor tiene longitud $b=1$ y el semieje menor $a=1/2$. Como $b>a$, los focos están sobre el eje y

$$F_1=(0,\sqrt{1^2-(1/2)^2})=(0,\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{F}_2=(0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Los vértices son: $(-\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ (ver Fig. 4).

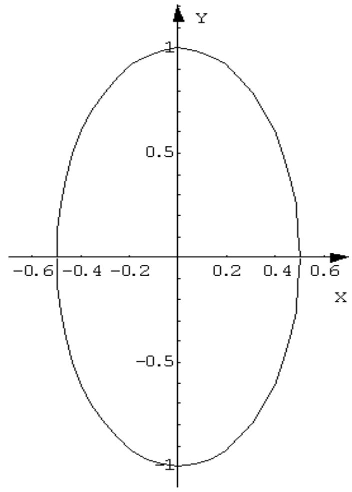

Figura 4: Elipse del ejemplo 1

Ejemplo 2

Hallemos la ecuación de la elipse cuyos focos son $(2,0)$, $(-2,0)$ y contiene al punto $(1,\frac{\sqrt{40}}{3})$.

Como el punto pertenece a la elipse, sabemos que

$$2a = d(F_1, P) + d(F_2, P) = \sqrt{1^2 + \frac{40}{9}} + \sqrt{(-3)^2 + \frac{40}{9}} = \frac{7}{3} + \frac{11}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

luego,

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3; \quad \text{y} \quad \mathrm{b}^2 = \mathrm{a}^2 - \mathrm{c}^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \mathrm{b} = \sqrt{5}.$$

La ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, (ver Fig. 5).

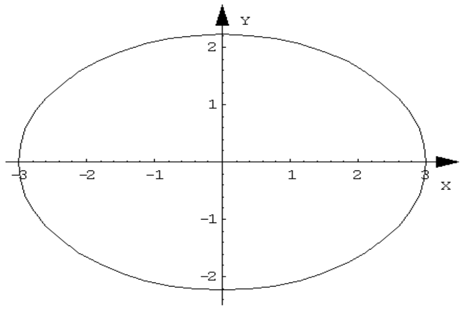

Figura 5: Elipse del ejemplo 2

2 Circunferencia

Una *circunferencia* es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo P_0 llamado *centro*. La distancia r, $r > 0$, de cualquier punto de la circunferencia a P_0 se demonina *radio* de la circunferencia. También podemos definirla como una elipse con focos coincidentes.

Sea $P_0 = (x_0, y_0)$, un punto $P = (x, y)$ pertenece a la circunferencia con centro en P_0 y radio r si $d(P, P_0) = r$, o sea

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r,$$

que es equivalente a

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.} \tag{5}$$

Ejemplo 3

La circunferencia con centro en $(0, 0)$ de radio r tiene ecuación $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 4

La ecuación de la circunferencia con centro en $(-1,4)$ de radio 2 es $(x+1)^2+(y-4)^2 = 4$, (ver Fig. 6). Si desarrollamos los cuadrados, podemos escribir la ecuación como $x^2+y^2-2x-8y+13=0$.

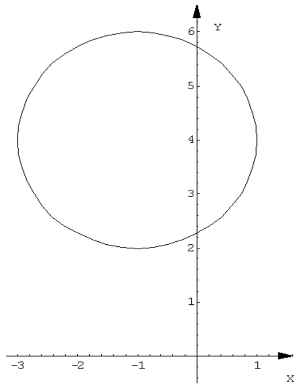

Figura 6: Circunferencia del ejemplo 4

En el ejemplo anterior vimos que $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ es la ecuación de una circunferencia. Se plantea ahora el problema inverso, dada la ecuación de una circunferencia de esta forma, calcular las coordenadas del centro y radio de dicha circunferencia.

Desarrollando los cuadrados en la ecuación 5 tenemos:

$$x^2-2x_0x+x_0^2+y^2-2y_0y+y_0^2-r^2=0,$$

o sea,

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+(x_0^2+y_0^2-r^2)=0.$$

Luego,

$$x^2+y^2+A\,x+B\,y+C=0, \tag{6}$$

donde

$$A=-2\,x_0,\ B=-2\,y_0 \quad \text{y} \quad C=x_0^2+y_0^2-r^2.$$

Si la ecuación 5 se presenta entonces bajo la forma 6 podemos calcular x_0, y_0, r, y por lo tanto llevarla a la forma 5, simplemente utilizando las igualdades anteriores:

$$x_0=-\frac{A}{2},\ \ y_0=-\frac{B}{2} \quad \text{y} \quad r=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}.$$

La ecuación 6 **no** es la ecuación de una circunferencia cuando $\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C \leq 0$, pues si lo fuese $r^2=\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C\leq 0$, lo cual es absurdo.

Si $\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C<0$, $\{(x,y)/x^2+y^2+A\,x+B\,y+C=0\}=\emptyset$. Y si $\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C=0$, $r=0$ y el único punto que verifica la ecuación es el punto $(x_0,y_0)=(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2})$.

Ejemplo 5

Hallemos el radio y el centro de la circunferencia que tiene ecuación $x^2+y^2-2\,x+4\,y+4=0$.

Comparando con (6) vemos que $A=-2, B=4$ y C $=4$. Entonces, $\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C=1+4-4=1>0$ y podemos afirmar que se trata de la ecuación de una circunferencia. Su radio es $r=\sqrt{\dfrac{A^2}{4}+\dfrac{B^2}{4}-C}=1$.

Luego, la ecuación de la circunferencia en la forma 5 es $(x-1)^2+(y+2)^2=1$, (ver Fig. 7).

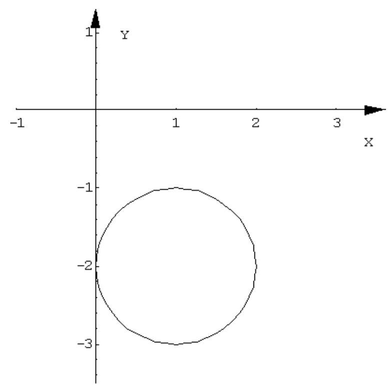

Figura 7: Circunferencia del ejemplo 5

3 Hipérbola

Una *hipérbola* es el conjunto de puntos del plano para los cuales el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos distintos y fijos F_1 y F_2, llamados *focos*, es un valor constante, positivo y menor que la distancia entre los focos.

El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ es el *centro* de la hipérbola. La recta que une F_1 y F_2 y su perpendicular por el centro son los ejes de simetría de la hipérbola.

Veamos un método para trazar su gráfico: En la figura 8 el hilo está fijo en F_2 y en la punta T de la regla. $\overline{F_1T}$ es constante e igual a la longitud de la regla. Luego

$$\overline{F_1P} + \overline{PT} = \overline{F_1T} = cte \tag{7}$$

Por otro lado $\overline{F_2P} + \overline{PT}$ es la longitud del hilo, por lo tanto es constante:

$$\overline{F_2P} + \overline{PT} = cte \tag{8}$$

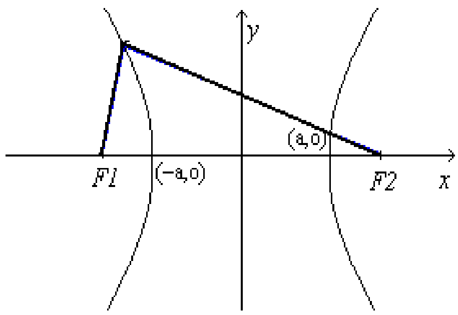

Figura 8: Procedimiento para trazar una elipse

Restando las ecuaciones 7 y 8 vemos que $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = cte$. Luego P describe un trozo de la rama derecha de la hipérbola.

Para calcular la ecuación de la hipérbola supongamos que los focos están sobre el eje x y son $F_1 = (-c, 0)$ y $F_2 = (c, 0)$, y llamemos $2a$ a la constante. Un punto $P = (x, y)$ pertenece a la hipérbola si satisface

$$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$$

esto es,

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a, \tag{9}$$

o sea

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Pasando la raíz que está restando al otro miembro y elevando al cuadrado nos queda

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2} \Rightarrow$$

$$\cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} \Rightarrow$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando nuevamente ambos miembros al cuadrado tenemos:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \quad \Rightarrow$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $2c = d(F_1, F_2) > 2a$, llamamos $b^2 = c^2 - a^2$. Reemplazando en la ecuación anterior tenemos $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ y dividiendo por a^2b^2 nos queda

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.} \tag{10}$$

Si $y = 0$, entonces $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$, esto es, $x^2 = a^2$, o sea, $|x| = a$. Luego los puntos de intersección de la hipérbola con el eje x son $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y los denominamos *vértices*. Observemos que la hipérbola no corta al eje y, ¿por qué?

Si los focos pertenecen al eje y, o sea, $F_1 = (0, -c)$ y $F_2 = (0, c)$, la ecuación que obtenemos es

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.} \tag{11}$$

La ecuación de una hipérbola centrada en el punto (x_0, y_0) es

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.} \tag{12}$$

Veamos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo 7</u>

La ecuación $9\,x^2 - 4\,y^2 = 36$ es equivalente a la ecuación $\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$. Se trata de la ecuación de una hipérbola cuyos focos son $F_1 = (-\sqrt{4+9}, 0) = (-\sqrt{13}, 0)$ y $F_2 = (\sqrt{4+9}, 0) = (\sqrt{13}, 0)$ y sus vértices $(-2, 0)$, $(2, 0)$, (ver Fig. 9).

<u>Ejemplo 8</u>

Hallemos la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $(0, -2)$, $(0, 2)$ y que corta al

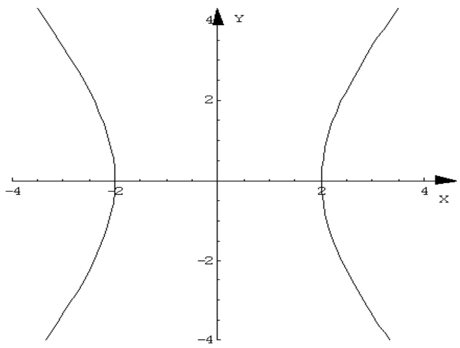

Figura 9: Hipérbola del ejemplo 7

eje y en (0,1).

$a = 1$, $c = 2$, luego $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. La ecuación es entonces

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1.$$

Su gráfica podemos verla en la figura 10.

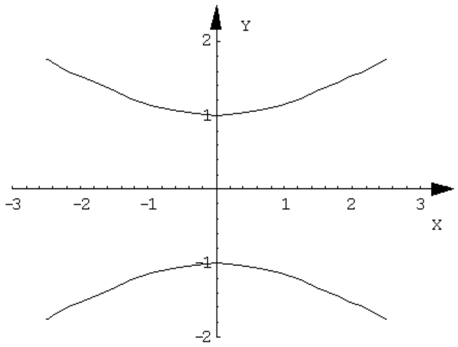

Figura 10: Hipérbola del ejemplo 8

La ecuación 10 tiene asociadas las funciones:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{(I)} \qquad\qquad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad \text{(II)}$$

Consideremos la función (I) restringida a $[a, +\infty)$, que escribimos en la forma

$$y = \frac{b}{a}\, x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Comparemos esta ecuación con la ecuación de la recta $y = \dfrac{b}{a}\,x$. Como $\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}} < 1$, $\dfrac{b}{a}\,x\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}} < \dfrac{b}{a}\,x$, luego, el gráfico de (I) está por debajo del gráfico de la recta.

Para valores muy grandes de x, $\dfrac{a^2}{x^2}$ es muy pequeño. Entonces la curva se aproxima a la recta, a medida que x crece, manteniéndose siempre por debajo de ella. Por esta razón, la recta $y = \dfrac{b}{a}x$ se llama una asíntota de (I). Esta recta es también asíntota de (II), si $x \leq -a$.

La recta $y = \dfrac{b}{a}x$ se denomina *asíntota* de la hipérbola. De la misma manera $y = -\dfrac{b}{a}\,x$ es también *asíntota* de la hipérbola.

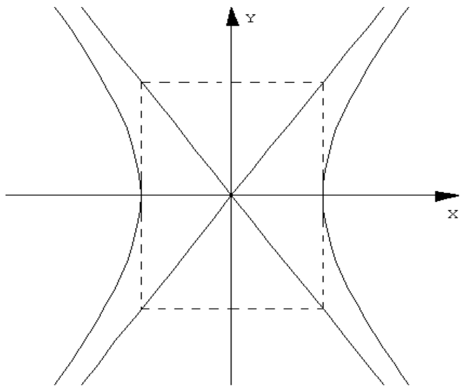

Figura 11:

Ejemplo 9

En la figura 12 podemos ver la hipérbola del ejemplo 7, junto con las asíntotas, cuyas ecuaciones son

$$y = \frac{3}{2}\,x \quad \text{y} \quad y = -\frac{3}{2}x.$$

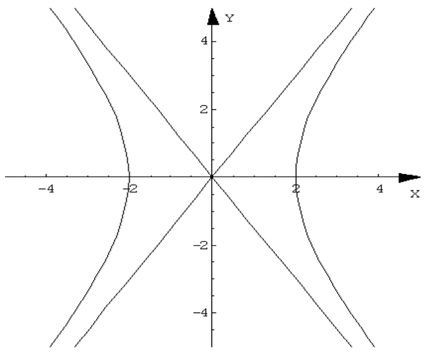

Figura 12: Hipérbola junto a sus asíntotas.

4 Parábola

Una *parábola* es el conjunto de puntos del plano que están a igual distancia de una recta fija llamada *directriz* y de un punto fijo llamado *foco*, que no pertenece a la directriz.

La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco es el *eje de simetría* de la parábola; su intersección con la parábola es un punto, llamado *vértice* de la parábola.

Un método para trazar una parábola es el siguiente: en la figura 13 un hilo está fijo en F y en el vértice C de la escuadra. Esto nos permite trazar un trozo de la parábola.

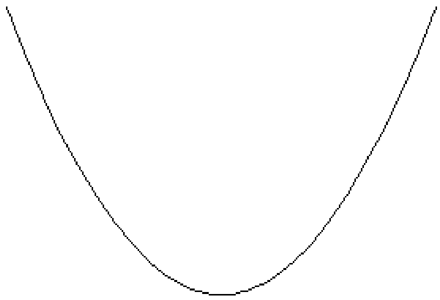

Figura 13: Procedimiento para trazar una parábola

Estudiemos su ecuación en el caso en que la directriz D es paralela a uno de los ejes cartesianos.

Cuando el vértice está en el origen, se ontiene la ecuación más sencilla. Supongamos primero que el foco está sobre el eje y, $F = (0, p)$ (la figura 14 corresponde a $p > 0$) y que D tiene ecuación $y = -p$. Sea $P = (x, y)$ un punto de la parábola y tracemos por P una perpendicular a D. Su intersección M con D tiene coordenadas

$(x, -p)$ y la distancia de P a D es la distancia de P a M.

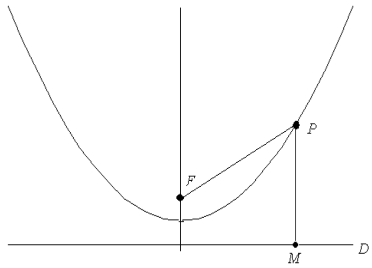

Figura 14: Parábola

Luego, como $P = (x, y)$ es un punto de la parábola, $d(P, F) = d(P, M)$. Entonces

$$(x - 0)^2 + (y - p)^2 = (x - x)^2 + (y + p)^2, \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2py + \cancel{p^2} = \cancel{y^2} + 2py + \cancel{p^2}$$

Por lo tanto $x^2 = 4py$ o en forma equivalente

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4p}.} \tag{13}$$

Por último digamos que si el foco está sobre el eje x, la ecuación de la parábola es $y^2 = 4px$ o equivalentemente

$$\boxed{x = \frac{y^2}{4p}.} \tag{14}$$

<u>Ejemplo 10</u>

Hallemos el foco y la directriz de la parábola $y = x^2$.

Si comparamos la ecuación $y = x^2$ con la ecución 13, vemos que $4p = 1$, o sea $p = \frac{1}{4}$. Entonces el foco es el punto $F = (0, \frac{1}{4})$ y la directriz tiene ecuación $y = -\frac{1}{4}$. En la figura 15 vemos su gráfico.

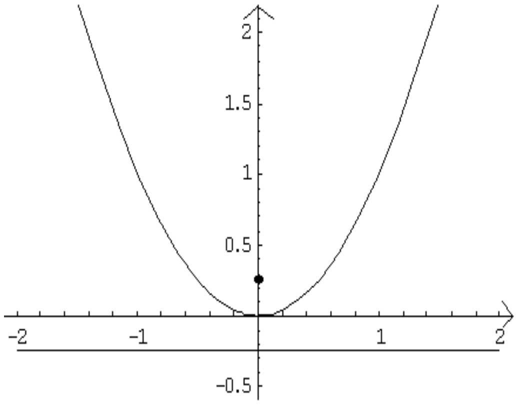

Figura 15: Parábola del ejemplo 10

Ejemplo 11

Dada la parábola $x = \frac{1}{3}\,y^2$, determinemos su foco y su directriz.

De la ecuación 14 tenemos que $4p = 3 \Rightarrow p = \dfrac{3}{4}$. Luego $F = (\frac{3}{4}, 0)$. D tiene ecuación, $x = -\frac{3}{4}$. La figura 16 muestra su gráfico.

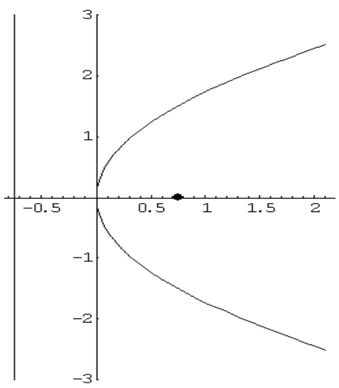

Figura 16: Parábola del ejemplo 11

5 Intersección entre cónicas y rectas

Todas las cónicas pueden ser representadas analíticamente por una ecuación de segundo grado de la forma general $A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$, A, B y C no simultaneamente nulos. Veamos cómo es la ecuación en cada caso:

- $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ *elipse*
- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *$cincunferencia$*
- $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ $(A > 0 B < 0)$ *hipérbola*
- $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ *o* $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *parábola*

Recordemos que la ecuación de una recta en el plano es $a\,x + b\,y + c = 0$. Encontrar la intersección entre una cónica y una recta consiste en plantear y resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0 \\ a\,x + b\,y + c = 0 \end{cases}$$

Si sustituimos la ecuación de primer grado en la ecuación de la cónica, obtenemos una ecuación de segundo grado $\alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma = 0$. Esta ecuación puede tener dos soluciones $(\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma > 0)$, una solución $(\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma = 0)$ o ninguna solución $(\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma < 0)$.

En el primer caso, la recta tiene dos puntos comunes con la cónica. Entonces decimos que la recta es secante a la cónica. En el segundo, la recta corta a la cónica en un solo punto. En este caso decimos que la recta es tangente a la cónica. Y en el último caso, la recta no corta a la cónica y se dice que es exterior a ella.

<u>Ejemplo 12</u>

Dada la recta $x + 2\,y + 1 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, veamos si hay entersección entre ellas.

Tenemos que resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2\,y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que $x = -2\,y - 1$. Sustituyendo x en la ecuación de la circunferencia tenemos que

$$(-2\,y - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 4\,y^2 + 4\,y + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow 5\,y^2 + 4\,y = 0.$$

Las dos soluciones de esta ecuación son $y = 0$ e $y = -\frac{4}{5}$. Si reemplazamos estos valores en la ecuacioón de la recta o en la de la circunferencia, obtenemos la coordenada x de los puntos donde se intersectan. Reemplazando, por ejemplo, los valores de y en la ecuación de la recta, tenemos

$x = -2\,0 - 1 = -1$ y $x = -2\,(-\frac{4}{5}) - 1 = \frac{3}{5}$.
Luego los puntos donde cortan son $(-1, 0)$ y $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

Ejemplo 13

Hallemos los puntos de intersección de la recta $y = 1$ y la elipse $2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,x + 6\,y - 7 = 0$.

Resolvamos el sistema

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,x + 6\,y - 7 = 0 \end{cases}$$

Reemplacemos la ecuación de la recta en la ecuación de la elipse

$2\,x^2 + 3\,1 - 4\,x + 6\,1 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\,x^2 - 4\,x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\,(x^2 - 2\,x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\,(x-1)^2 = 0$.
Luego $x = 1$. Por lo tanto la recta es tangente a la elipse en el punto $(1, 1)$.

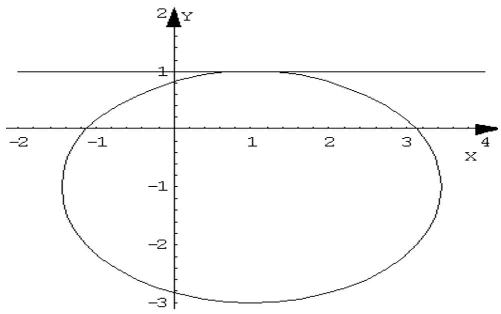

Figura 17:

6 Propiedades de reflexión de las cónicas

Estas propiedades son de interés en varias aplicaciones. La cónica es capaz de reflejar un haz de luz que llega hasta ella. Veamos qué ocurre en cada una de ellas:

La elipse concentra en un foco todos los rayos que surgen del otro foco y se reflejan en ella. En la figura 18 se emite luz desde F_2 y los rayos se concentran en F_1.

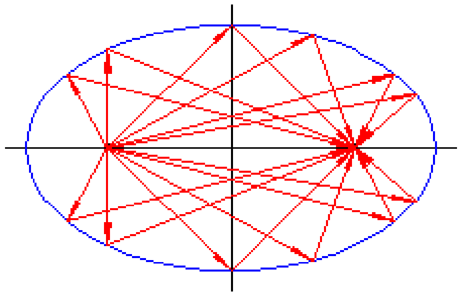

Figura 18: Comportamiento de la elipse

La hipérbola refleja los rayos que salen de un foco como si vinieran del otro foco.
En la figura 19 se emite luz desde F_1 y los rayos se reflejan en la rama C_1 de la hipérbola como si estuvieran viniendo desde F_2.
La rama C_2 no se utiliza por eso está dibujada en línea punteada.

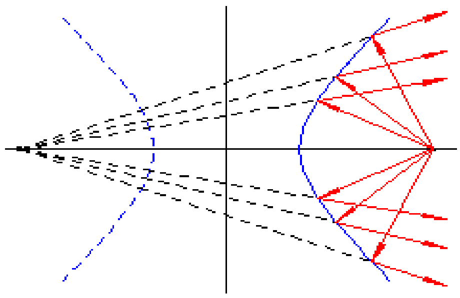

Figura 19: Comportamiento de la hipérbola

La parábola refleja todos los rayos que nacen del foco en dirección paralela a su eje, como muestra la figura 20.
También, si llegan rayos paralelos al eje, los refleja concentrándolos en el foco.
Haciendo girar la parábola -o un trozo de ella- alrededor de su eje, se logra un reflector parabólico. Estos reflectores se usan en faros de automóviles y también en algunas antenas transmisoras y receptoras.

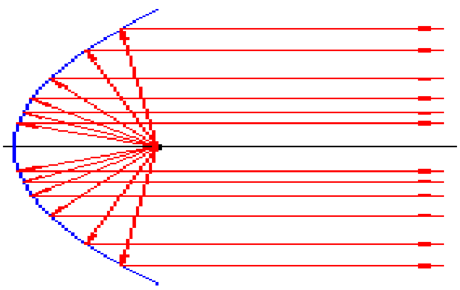

Figura 20: Comportamiento de la parábola

Las superficies reflectoras elípticas e hiperbólicas se generan por rotación de la cónica -o de un trozo de ella- alrededor del eje que contiene a los focos. Los reflectores hiperbólicos se pueden ver aplicados, por ejemplo, en sistemas de iluminación de estadios deportivos y en algunos telescopios. Las superficies elípticas ayudan a concentrar en un punto la radiación que se emite en otro y se usan, por ejemplo, en algunos equipos para tratamiento médico de pacientes.

7 Otras aplicaciones

Los planetas "giran alrededor" del sol con órbitas elípticas (1° Ley de Kepler -siglo XVII), el sol está en uno de los focos. Las órbitas que describen algunos cometas son hipérbolicas; ellos se acercan una vez al sol -que está en uno de los focos- y luego se pierden en el espacio.

EJERCICIOS

1. Halle la longitud de los semiejes, las coordenadas de los vértices y de los focos de cada una de las siguientes elipses. Realice el gráfico de cada una.
   (a) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$,
   (b) $16x^2 + 25y^2 = 100$,
   (c) $4x^2 + y^2 = 1$.

2. Halle la ecuación de la elipse que satisface las siguientes condiciones:
   (a) dos de sus vértices en $A_1 = (8,0)$ y $A_2(-8,0)$ y sus focos en $F_1(5,0)$ y $F_2 = (-5,0)$.
   (b) focos en $F_1 = (3,0)$ y $F_2 = (-3,0)$ y la longitud del semieje mayor igual a 6.
   (c) longitud del semieje menor igual a 6 y los focos son $F_1 = (0,4)$ y $F_2 = (0,-4)$.

3. El arco de un túnel es una semielipse de $20m$ de ancho y $7m$ de alto. Encuentre la altura en la orilla de un carril si la orilla está a $7m$ del centro.

4. Halle en cada caso la ecuación de la circunferencia:
   (a) con centro $C = (-1,2)$ y radio 5,
   (b) con centro $C = (2,1)$ y que pasa por $A = (5,5)$,
   (c) que pasa por los puntos $A = (0,2)$, $B = (1,1)$ y $C = (2,-2)$.

5. Indique si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia, un punto, o el conjunto vacío.
   (a) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$,
   (b) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 100 = 0$,
   (c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$,
   (d) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y - 5 = 0$.

6. Determine las coordenadas de los vértices, los focos y la ecuación de las asíntotas de cada una de las siguientes hipérbolas. Realice el gráfico de cada una.
   (a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$,
   (b) $24x^2 - 25y^2 = 600$,
   (c) $16y^2 - 9x^2 = 144$.

7. Escriba, en cada caso, la ecuación de la hipérbola que verifica las condiciones

   (a) focos $F_1 = (0, -3)$, $F_2(0, 3)$ y un vrtice en $(-1, 0)$,

   (b) focos sobre el eje x, pasa por $A = (4, \sqrt{5})$ y $B = (-4\sqrt{3}, 5)$,

   (c) focos $F_1 = (-2, 0)$, $F_2(2, 0)$, asíntotas $y = \pm\frac{3}{5}x$

8. Determine las coordenads del foco y la ecuación de la directriz de las siguientes parábolas. Grafique.

   (a) $x^2 = 8y$,

   (b) $y^2 - 10x = 0$,

   (c) $x^2 = -10y$

9. Halle la ecuación de las siguientes parábolas con vértice en el origen de coordenadas y que verifiquen las condiciones:

   (a) foco $F = (4, 0)$,

   (b) directriz $2x + 5 = 0$,

   (c) foco sobre el eje y y pasa por $(6, -2)$.

10. Halle la intersección de:

    (a) la recta $x + y + 2 = 0$ y la elipse $2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,x + 6\,y - 3 = 0$,

    (b) la recta $y = 0.5\,x - 2$ y la parábola $y = x^2 + 2$,

    (c) la recta $-x + y = -2$ y la hipérbola $2\,x^2 - 3\,y^2 = 12$.