Vectores

1. Definiciones básicas

1.1. Magnitudes escalares y vectoriales.

Hay magnitudes que quedan determinadas dando un solo número real: su medida. Por ejemplo: la longitud de una varilla, o la masa de un cuerpo o el tiempo transcurrido entre dos sucesos. Tales magnitudes se llaman **escalares**, y pueden ser representadas por segmentos tomados sobre una recta a partir de un origen y de longitud igual al número real que indica su medida. Otros ejemplos de escalares son: la densidad, el volumen, el trabajo, la potencia.
Para otras magnitudes, en cambio, no basta dar un número para determinarlas. Para la velocidad de un punto, por ejemplo, no basta conocer su intensidad, sino que hace falta conocer, además, la dirección y el sentido en que el punto se mueve. La dirección viene dada por una recta, de manera tal que todas las rectas paralelas tienen la misma dirección, y en cambio rectas no paralelas tienen direcciones diferentes. Cada dirección tiene dos sentidos, determinados por las dos orientaciones posibles de la recta. Lo mismo que con las velocidades ocurre con las fuerzas: su efecto depende no sólo de la intensidad, sino también de la dirección y sentido en que actúan.
Estas magnitudes en las cuales hay que distinguir su intensidad (que es una magnitud esca1ar), su dirección y su sentido, se llaman **magnitudes vectoriales**. Otros ejemplos son: la aceleración, la cantidad de movimiento, la intensidad de un campo eléctrico o de un campo magnético. Las magnitudes vectoriales ya no se pueden representar, como los escalares, por segmentos tomados sobre una misma recta. Hay que tomar segmentos de longitud variable (indicadora de la intensidad) a partir de un punto fijo, los cuales tengan la dirección y el sentido correspondientes. Resumiendo y precisando, podemos establecer las siguientes definiciones:

Definición 1: Se dice que una magnitud es un **escalar** cuando el conjunto de sus valores se puede poner en correspondencia biunívoca y continua con el conjunto de los números reales o una parte del mismo.

Definición 2: Una magnitud se llama **vectorial** cuando el conjunto de sus valores puede ponerse en correspondencia biunívoca y continua con el conjunto de los segmentos orientados que parten de un mismo origen, o con una parte del mismo.

1.2. Vectores

Un segmento de recta queda determinado por sus dos puntos extremos. Cuando estos puntos están dados en un cierto orden, se dice que el segmento es orientado.

Definición 3: Se llama *vector* a todo segmento orientado. El primero de los puntos que lo determinan se llama *origen* y el segundo *extremo* del vector.

La recta que contiene el vector determina la dirección del mismo y la orientación sobre la recta, definida por el origen y el extremo del vector, determina el sentido de este último. Todos los vectores situados sobre una misma recta o rectas paralelas tienen la misma dirección. Sobre cada recta hay dos sentidos opuestos. Toda magnitud vectorial puede representarse por un vector, cuya longitud sea proporcional a la intensidad y cuya dirección y sentido sean los correspondientes a la magnitud.

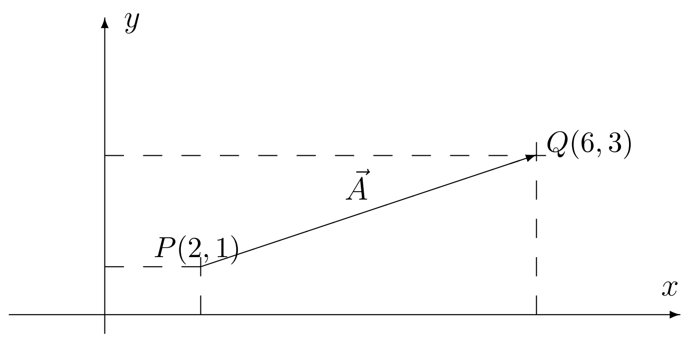
Definición 4: Se llama módulo de un vector a la longitud del segmento orientado que lo define.

El módulo de un vector es siempre un número positivo. Si el vector es $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$, el módulo puede representarse por cualquiera de las tres maneras:

$$mod\vec{A} = |\vec{A}| = |\overrightarrow{PQ}|$$

donde $|\overrightarrow{PQ}|$indica la longitud del segmento $\overrightarrow{PQ}$

Ejemplo : Si el vector $\vec{A}$(en el plano) tiene por origen $P(2,1)$ y por extremo $Q(6,3)$, entonces (recordar el teorema de Pitágoras): $|\vec{A}| = \sqrt{(6-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20}$



Cuando el módulo es nulo el segmento se reduce a un punto y no puede hablarse de vector, puesto que faltan la dirección y el sentido. Sin embargo, por comodidad de expresión, se conviene en definir como **vector nulo** al que tiene su módulo igual a cero.

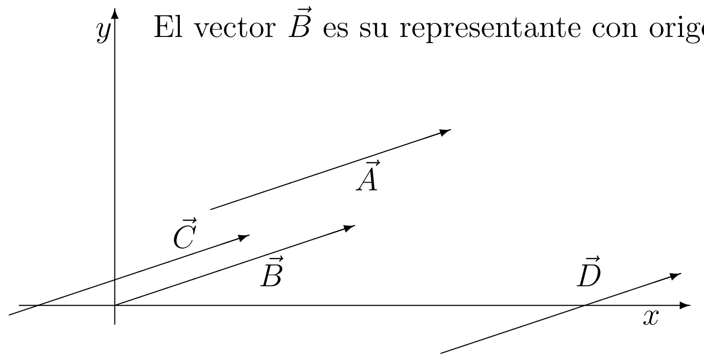
1.3. Igualdad de vectores

Definición 5: Dos vectores se dicen **iguales** cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección y sentido.

Con este criterio de igualdad, todos los vectores pueden ser trasladados de manera que tengan el mismo origen O. De esta manera cada vector y todos sus iguales tendrán un solo representante como vector de origen O.

Los vectores $\vec{A}$ $\vec{B}$ $\vec{C}$ $\vec{D}$ son iguales

El vector $\vec{B}$ es su representante con origen en O



2. Componentes y cosenos directores de un vector

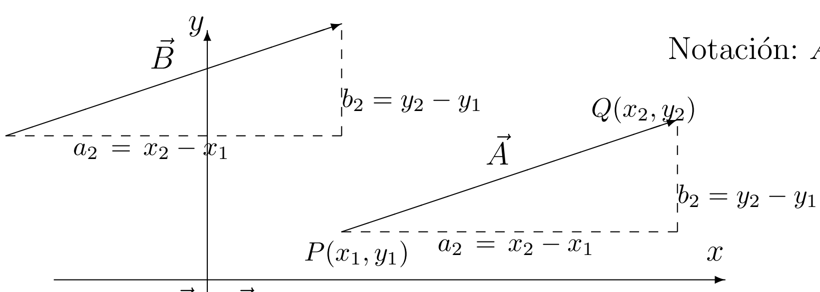
2.1. Componentes de un vector

En el plano

Definición 1: Se llaman *componentes* de un vector $\vec{A}$ respecto del sistema de coordenadas con origen O y ejes x, y a las proyecciones de $\vec{A}$ sobre los ejes, o sea a los números:

$$a_1 = x_2 - x_1 \qquad a_2 = y_2 - y_1$$

Importante: todos los vectores iguales (misma dirección, sentido y módulo) tienen las mismas componentes.



Notación: $\vec{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \vec{B}$

$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores iguales: tienen las mismas componentes

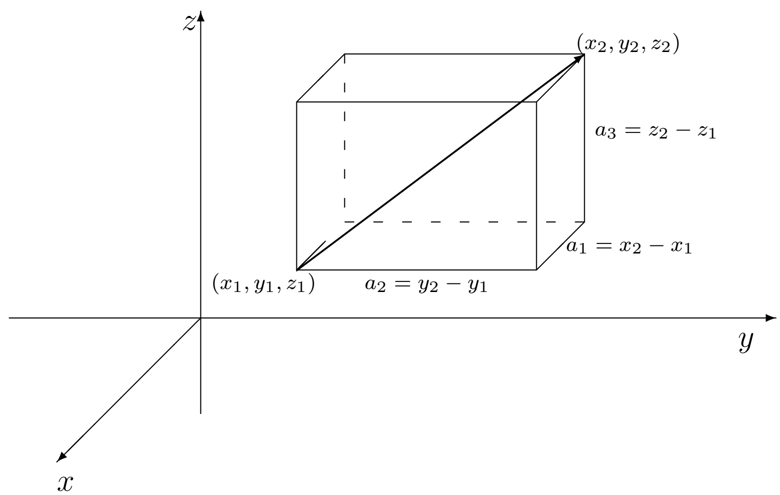
Ejemplo: Sea el vector $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$ (del ejemplo anterior), donde $P(2,2)$ y $Q(5,6)$, entonces las componentes de $\vec{A}$ son $\vec{A} = (3,4)$ y su módulo es $|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Un vector con las mismas componentes que $\vec{A}$ pero con origen en $P_1(8,-3)$ debe tener extremo en $Q_1(x_1, y_1)$ de modo que: $\begin{cases} x_1 - 8 = & 3 \\ y_1 - (-3) = & 4 \end{cases}$ Luego, $x_1 = 11$ y $y_1 = 1$
Un vector con las mismas componentes que $\vec{A}$ pero con origen en $O(0,0)$ debe tener extremo en $Q_2(x_2, y_2)$ de modo que: $\begin{cases} x_2 - 0 = & 3 \\ y_2 - 0 = & 4 \end{cases}$ Luego, $x_2 = 3$ y $y_2 = 4$.

En el espacio

Supongamos en el espacio un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de origen O y ejes x, y, z. Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ el origen y el extremo de un vector dado $\vec{A}$

Definición 2: Se llaman *componentes* de un vector $\vec{A}$ respecto del sistema de coordenadas con origen O y ejes x, y, z a las proyecciones de $\vec{A}$ sobre los ejes, o sea a los números:

$$a_1 = x_2 - x_1 \qquad a_2 = y_2 - y_1 \qquad a_3 = z_2 - z_1$$



En general, pondremos $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ para indicar que $a_1,\ a_2,\ a_3$ son las componentes del vector $\vec{A}$. Estas componentes son números que pueden ser positivos o negativos. Hay que tomarlos siempre como en la definición, es decir, como diferencia entre las coordenadas del extremo del vector y las coordenadas del origen. Así, por ejemplo, dos vectores opuestos (de igual módulo y dirección, pero de sentidos opuestos) tiene las componentes iguales en valor absoluto, pero de signos contrarios. Como resulta de la figura anterior, el vector $\vec{A}$ es la diagonal de un paralelepípedo recto cuyas aristas son $a_1,\ a_2,\ a_3$. Por tanto:
$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, expresión que siempre es positiva y da el módulo en función de sus componentes.

Ejemplo: Sea el vector $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$, donde $P(1, -2, 3)$ y $Q(3, 6, -2)$, entonces las componentes de $\vec{A}$ son $\vec{A} = (2, 8, -5)$ y su módulo es $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-5)^2} = \sqrt{93}$.

2.2. Cosenos directores de un vector

Definición 2: Se llaman *cosenos directores* de un vector, respecto de un sistema de coordenadas ortogonales con origen O y ejes $x,\ y,\ z$, a los cosenos de los ángulos que el mismo forma con el sentido positivo de los ejes coordenados.

Los ángulos hay que tomarlos entre 0 y π, de manera que los cosenos directores pueden ser positivos o negativos. Si los ángulos del vector $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$ con los ejes los representamos por $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, los cosenos directores se deducen de las fórmulas:

$$a_1 = |\vec{A}|\ \cos\alpha \qquad a_2 = |\vec{A}|\ \cos\beta \qquad a_3 = |\vec{A}|\ \cos\gamma$$

Si elevamos estas igualdades al cuadrado y las sumamos miembro a miembro, resulta:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

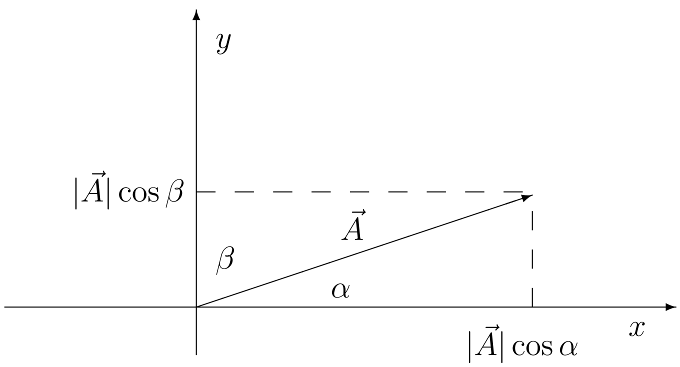
que es la relación fundamental que liga los cosenos directores de un vector. También se deduce:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

En el plano, α y β son ángulos directores de $\vec{A}$, entonces:

$$a_1 = |\vec{A}|\ \cos\alpha \qquad a_2 = |\vec{A}|\ \cos\beta$$

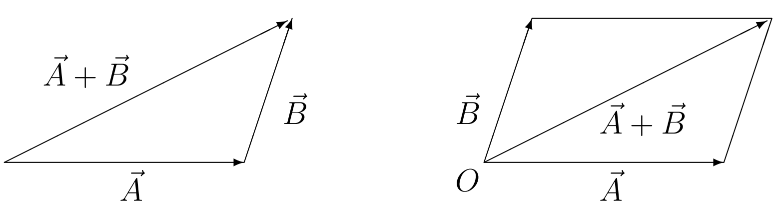
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$



3. Operaciones con vectores

3.1. Suma

Para sumar dos vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ se procede de la siguiente manera. A partir del extremo $\vec{A}$ se lleva el vector $\vec{B}$; y el vector cuyo origen es el origen de $\vec{A}$ y cuyo extremo es el extremo de $\vec{B}$, una vez así colocado es el vector suma $\vec{A}+\vec{B}$. Al mismo resultado se llega tomando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el mismo origen O y definiendo la suma como la diagonal que pasa por O, del paralelogramo construído sobre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

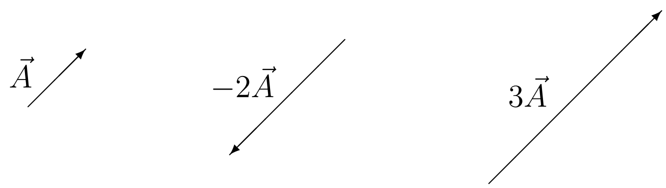


Definición 1: El vector suma de dos vectores $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ es el vector que tiene por origen y extremo, respectivamente, el origen y extremo de la poligonal obtenida llevando un vector a continuación del otro. Las componentes del vector suma son: $\vec{A}+\vec{B} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ (observar que $\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$).

3.2. Producto de un escalar por un vector

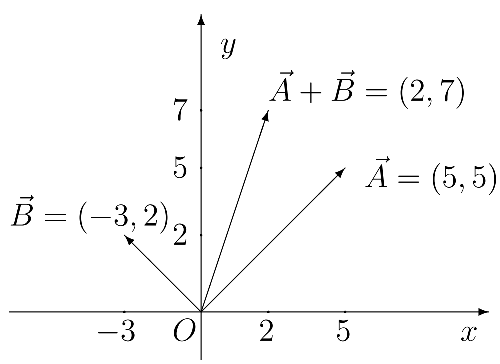
Definición 2: Se llama producto $\lambda\vec{A}$ del vector $\vec{A}$ por el escalar λ, al vector que tiene :

a) el módulo igual al producto del módulo de $\vec{A}$ por el valor absoluto de λ
b) la misma dirección que $\vec{A}$
c) el mismo sentido que $\vec{A}$ si λ es positivo y el sentido opuesto si λ es negativo.

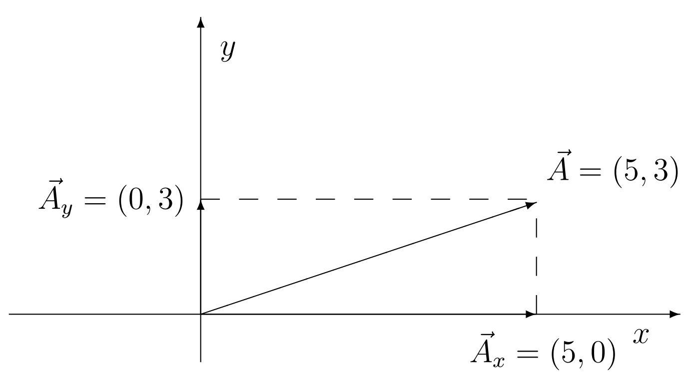


Observación: si $\lambda = \frac{1}{|\vec{A}|}$ entonces el vector $\lambda\vec{A}$, será un vector de módulo unidad y de la misma dirección y sentido que $\vec{A}$; llamado **vector unitario** o **versor**.
Por ejemplo: si $\vec{A} = (-2, 4, 6)$, entonces $|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56}$ y el vector: $\vec{A}_u = (-\frac{2}{\sqrt{56}}, \frac{4}{\sqrt{56}}, \frac{6}{\sqrt{56}})$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{A}$ pero con módulo 1.

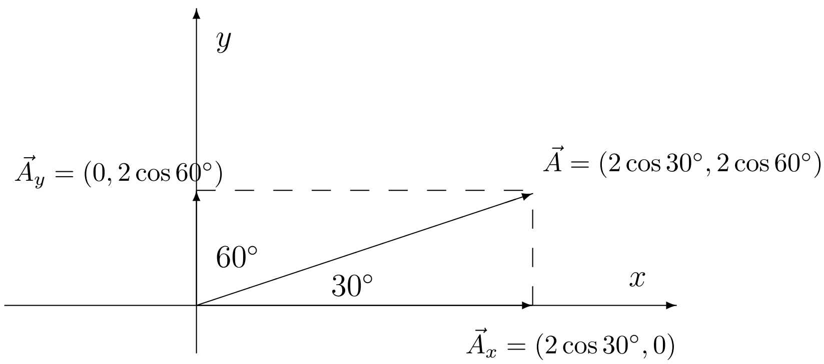
Ejemplos en el plano:
1) Si $\vec{A} = (5,5)$ y $\vec{B} = (-3,2)$ entonces $\vec{A} + \vec{B} = (2,7)$



2) Si $\vec{A} = (5,3)$ y llamamos $\vec{A}_x = (5,0)$ que tiene la dirección del eje x y $\vec{A}_y = (0,3)$ que tiene la dirección del eje y. Entonces $\vec{A} = (5,0) + (0,3) = \vec{A}_x + \vec{A}_y$. Cualquier vector se puede escribir como la suma de dos vectores que tienen la dirección de los ejes coordenados.



3) Si $\vec{A}$ es tal que $|\vec{A}| = 2$ y $\alpha = 30°$. Los vectores con las direcciones de los ejes coordenados son $\vec{A}_x = (|\vec{A}|\cos\alpha, 0)$ y $\vec{A}_y = (0, |\vec{A}|\cos\beta)$.
Entonces $\vec{A} = (2\cos 30°, 2\cos 60°) = (\sqrt{3}, 1)$; $\vec{A}_x = (2\cos 30°, 0) = (\sqrt{3}, 0)$ y $A_y = (0, 2\cos 60°) = (0,1)$



4. Ejercicios

1. Dado $\vec{A} = (4, -2)$; hallar:

   a) el extremo del representante cuyo origen es $P(3, 1)$;

   b) el origen, del representante cuyo extremo es $Q(7, 5)$;

   c) el módulo de $\vec{A}$.

2. Dado $\vec{A} = (3, -3, -7)$; hallar:

   a) el extremo del representante cuyo origen es $P(-3, 2, 5)$;

   b) el origen, del representante cuyo extremo es $Q(2, -5, 6)$;

   c) el módulo de $\vec{A}$.

3. Dado $\vec{A}$ tal que $|\vec{A}| = 2$ y sus ángulos directores son: $\alpha = \pi/4 \quad \beta = \pi/3 \quad \gamma = 2\pi/3$.

   a) Calcular sus componentes.

   b) Hallar el extremo de su representante cuyo origen es $P(-1, 3, 2)$.

   c) Hallar el origen del representante, cuyo extremo es $B(7, -6, 1)$.

4. Calcular los cosenos directores del vector $\vec{A} = (3/13\ ,\ 4/13\ ,\ 12/13)$

5. ¿Puede un vector tener las siguientes ternas de ángulos directores?

   a) $\alpha = \pi/4 \qquad \beta = 3\pi/4 \qquad \gamma = \pi/3$

   b) $\alpha = \pi/2 \qquad \beta = 5\pi/6 \qquad \gamma = \pi/3$

6. ¿Puede un vector formar con dos ejes coordenados los siguientes ángulos?. En caso afirmativo, ¿cual es el tercer ángulo?

   a) $\alpha = \pi/6 \qquad \beta = \pi/4$

   b) $\beta = \pi/3 \qquad \gamma = \pi/3$

   c) $\alpha = 5\pi/6 \qquad \gamma = \pi/6$

7. Un vector $\vec{A}$ forma con los ejes x e y ángulos $\alpha = \pi/3$ $\beta = 2\pi/3$. Calcular el tercer ángulo director y sus componentes, sabiendo que $|\vec{A}| = 2$.

8. Hallar las coordenadas de un punto M, que es extremo de $\overrightarrow{OM}$ y forma ángulos iguales con los tres ejes, si su módulo es tres.

9. Un vector tiene módulo 13 y sus dos primeras componentes son $a_1 = 3;\quad a_2 = 4$, ¿cual es la tercera componente?

10. Hallar las componentes y los cosenos directores de vectores paralelos a los ejes coordenados. Graficar.

11.
    a) Representar en el mismo gráfico los vectores del plano $\vec{A}_1 = (4, -3)$, $\vec{A}_2 = (2, 5)$ y su suma $\vec{S} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Calcular el módulo de $\vec{S}$ y el ángulo que forma $\vec{S}$ con $\vec{A}_1$ y con $\vec{A}_2$ (recordar el Teorema del coseno que está al final de Ejercicios).

    b) Representar en el mismo gráfico los vectores del espacio $\vec{A}_1 = (2, 3, 4)$, $\vec{A}_2 = (1, 5, 5)$ y su suma $\vec{S} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Calcular el módulo de $\vec{S}$ y el ángulo que forma $\vec{S}$ con $\vec{A}_1$ y con $\vec{A}_2$.

    c) Representar en el mismo gráfico los vectores del plano $\vec{B}_1 = (4, 2)$, $\vec{B}_2 = (2, 1)$, $\vec{B}_3 = (-1, -1/2)$, $\vec{S}_1 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, $\vec{S}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}_3$. Calcular el módulo de $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$. Calcular el ángulo que forma $\vec{S}_1$ con $\vec{B}_1$. Calcular el ángulo que forma $\vec{S}_2$ con $\vec{B}_3$.

    d) Representar en el mismo gráfico los vectores del plano $\vec{B}_1 = (-6, 3)$, $\vec{B}_2 = (2, -5)$, $\vec{R}_1 = -2\vec{B}_1$, $\vec{R}_2 = \frac{1}{2}\vec{B}_1$, $\vec{R}_3 = 3\vec{B}_2$, $\vec{T}_1 = \vec{R}_1 + \vec{R}_3$.

12. Dados el vector $\overrightarrow{AB}$, de origen en $A(1, 2)$ y extremo en $B(2, 3)$ y el vector $\overrightarrow{AP}$, de origen en $A(1, 2)$ y extremo en $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la recta que contiene a $\overrightarrow{AB}$.

    a) Representar gráficamente esta situación.

    b) Considerar la igualdad entre vectores como la igualdad de sus componentes. Si $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$, donde t es un número real, se puede eliminar t de las dos ecuaciones escalares que resultan. Dar la interpretación de la ecuación obtenida.

13. Con la idea presentada en el ejercicio anterior, encontrar la ecuación de la recta dirigida por el vector $\vec{v} = (a, b)$ que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

14. Dados los puntos $P_1(4, -1, 6)$ y $P_2(5, 7, 4)$.

    a) Representar gráficamente el vector $\vec{U} = \overrightarrow{P_1P_2}$.

    b) Hallar el vector unitario que tenga la misma dirección que $\overrightarrow{P_1P_2}$.

    c) Hallar el vector $\vec{B}$ tal que $\vec{B} = 3\overrightarrow{P_1P_2}$. ¿Cuál es el módulo de $\vec{B}$?

    d) Hallar un vector de módulo 2 que tenga la misma dirección que $\overrightarrow{P_1P_2}$.

15. Dado el vector $\vec{A} = (-1, 7, -3)$ y el punto $P(-3, 7, 8)$, hallar el punto Q tal que $\vec{A} = -6\overrightarrow{PQ}$.

16. En Física las fuerzas son magnitudes vectoriales. Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ que forman un ángulo de 60°, $|\vec{F_1}| = 80$ Newton y $|\vec{F_2}| = 50$ Newton.
a) Representar gráficamente (teniendo en cuenta una escala adecuada, Por ejemplo: 1cm. cada 10Newton) $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ en un sistema cartesiano donde el eje x coincida con la dirección de la fuerza $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ se encuentre en el primer cuadrante.
b) Calcular $\vec{F_1}x$; $\vec{F_2}x$; $\vec{F_1}y$ y $\vec{F_2}y$ (como en el ejemplo 3 de la página 6).
c) Hallar $\vec{R}_x$ y $\vec{R}_y$ que sumados dan la fuerza resultante.

17. Un cuerpo es colgado con dos cuerdas, una de 3 metros y la otra de 4 metros. Las cuerdas se atan en sendos ganchos, fijos en el techo, que distan entren sí 5 metros. El peso del cuerpo (fuerza con que la tierra lo atrae) es de 120 Newton (unidad de fuerza en el sistema MKS). Cada cuerda ejerce sobre el cuerpo una fuerza que llamaremos tensión. La tensión tiene la dirección que da la cuerda tensa. Realizar un esquema de la situación, utilizar los teoremas del seno o del coseno (ver al final del ejercicio) para calcular los ángulos del triángulo determinado por las cuerdas y el techo. Se pretende calcular el módulo de cada tensión, para ello asumiremos que el cuerpo está quieto, luego la suma de las fuerzas exteriores que se aplican sobre el debe ser cero. Desarrolle los siguientes procedimientos.

    a) La suma vectorial de las tensiones debe dar un vector del mismo módulo y dirección que el peso pero de sentido contrario. Resolver gráficamente utilizando una escala adecuada.

    b) Utilizar el teorema del seno para resolver la situación anterior.

    c) Considere un sistema de ejes cartesianos, encontrar las componentes de los vectores en cada eje, la suma en cada eje debe ser nula.

18. Si en las mismas condiciones del problema anterior los datos fueran las tensiones obtenidas calcular el peso.

    a) Considerando el sistema de ejes cartesianos.

    b) Utilizando el teorema del coseno.

Teorema del seno: Dado un triángulo de lados A B C y ángulos α β γ, donde α es el ángulo opuesto a A, β es el ángulo opuesto a B y γ es el ángulo opuesto a C, se tiene:

$$\frac{A}{\mathrm{sen}\alpha} = \frac{B}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{C}{\mathrm{sen}\gamma}$$

Teorema del coseno: Dado un triángulo de lados A B C y ángulos α β γ, donde α es el ángulo opuesto a A, β es el ángulo opuesto a B y γ es el ángulo opuesto a C, se tiene:

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \ \cos\alpha$$