TEMA 1. VECTORES Y MATRICES

1. VECTORES Y MATRICES

- 1.1. Definición de vector. Operaciones elementales
- 1.2. Matrices. Operaciones elementales
- 1.3. Traza y Determinante
- 1.4. Aplicaciones

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.1. Definición de Vector.

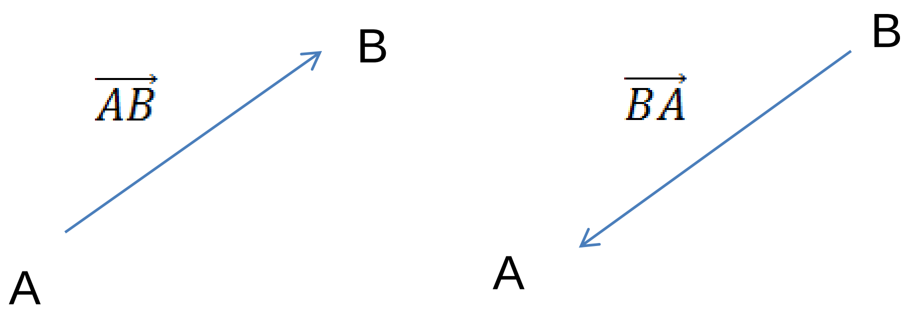
1.1.2. Operaciones elementales.

1.1.3. Combinaciones lineales. Dependencia Independencia Lineal

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.1. CONCEPTO DE VECTOR

a) SEGMENTO ORIENTADO



ELEMENTOS DE UN VECTOR:

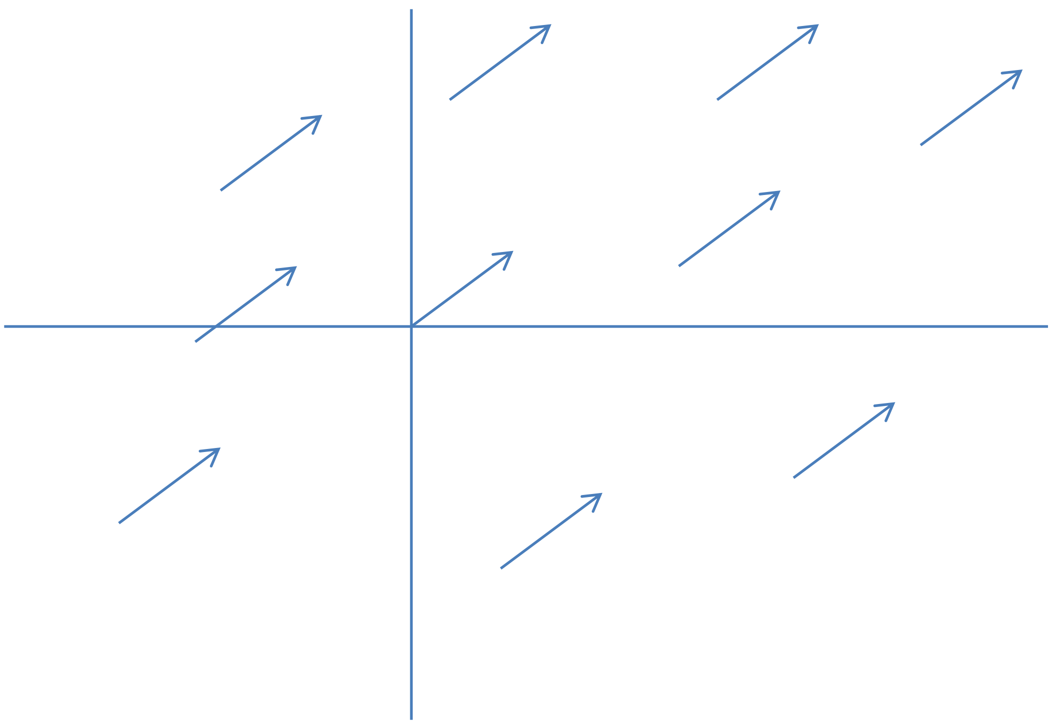
MÓDULO: longitud del segmento
DIRECCIÓN : recta que contiene al segmento
SENTIDO: orientación

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

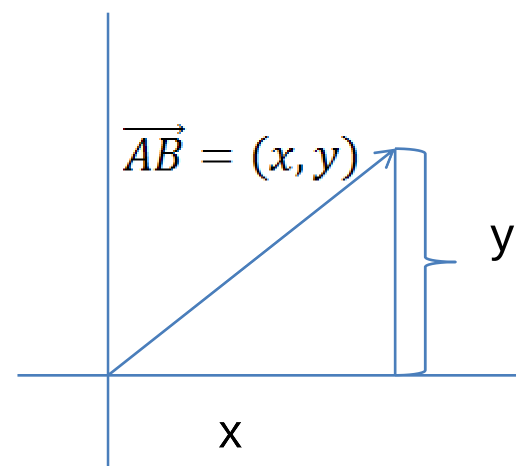
1.1.1. CONCEPTO DE VECTOR

b) VECTOR LIBRE

CONSIDEREMOS SEGMENTOS ORIENTADOS CON MISMO MÓDULO, DIRECCIÓN Y SENTIDO



¿qué característica tienen en común?

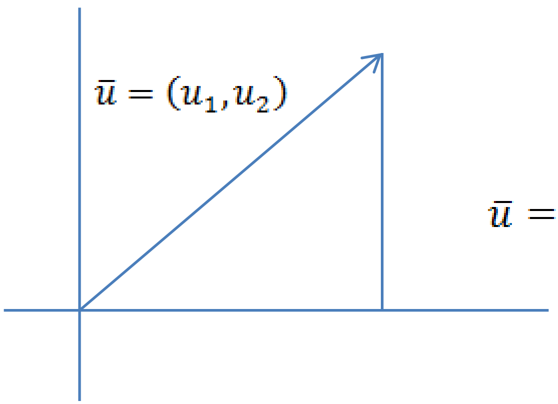


Componentes del vector

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.1. CONCEPTO DE VECTOR

c) ESTRUCTURA DE DATOS: COMPONENTES



$$\bar{u} = (u_1, u_2) \quad con \quad u_1, u_2 \in R \quad decimos\ que \quad \bar{u} \in R^2$$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad con \quad u_1, u_2, u_3 \in R \quad decimos\ que \quad \bar{u} \in R^3$$

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \quad con \quad u_1, u_2, \dots, u_n \in R \quad decimos\ que \quad \bar{u} \in R^n$$

MÓDULO DE UN VECTOR

$$\bar{u} = (u_1, u_2) \in R^2 : |\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in R^n : |\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

Ejemplo: Calcular el módulo de (3,5), (2,-7), (1,5,8)

COMPONENTES DE UN VECTOR A PARTIR DE SUS EXTREMOS

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n)$$

Ejemplo: Dados los puntos A(1,5), B(2,7), C(3,8) determinar las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.1. CONCEPTO DE VECTOR : EJERCICIOS

1. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) (3,7) b) (8,3,-2) c) (-3,1,0) d) (3,2,1/2,1/2)

2. Determina las componentes de los vectores indicados, a partir de los puntos señalados:

a) A(1,3) B(6,-7) vector: $\overrightarrow{AB}$ b) C(3,2,1) D(6,-1,7) vector $\overrightarrow{DC}$

c) E(1,8,-4) F(3,7,1) vector $\overrightarrow{EF}$

3. Dados los vectores de componentes indicadas, y del extremo inicial, determina las coordenadas del extremo final:

a) $\overrightarrow{AB} = (3{,}7{,}1)$ $A = (1{,}1{,}0)$ $B =$

b) $\overrightarrow{CD} = (-1{,}8{,}11)$ $C = (-2{,}1{,}6)$ $D =$

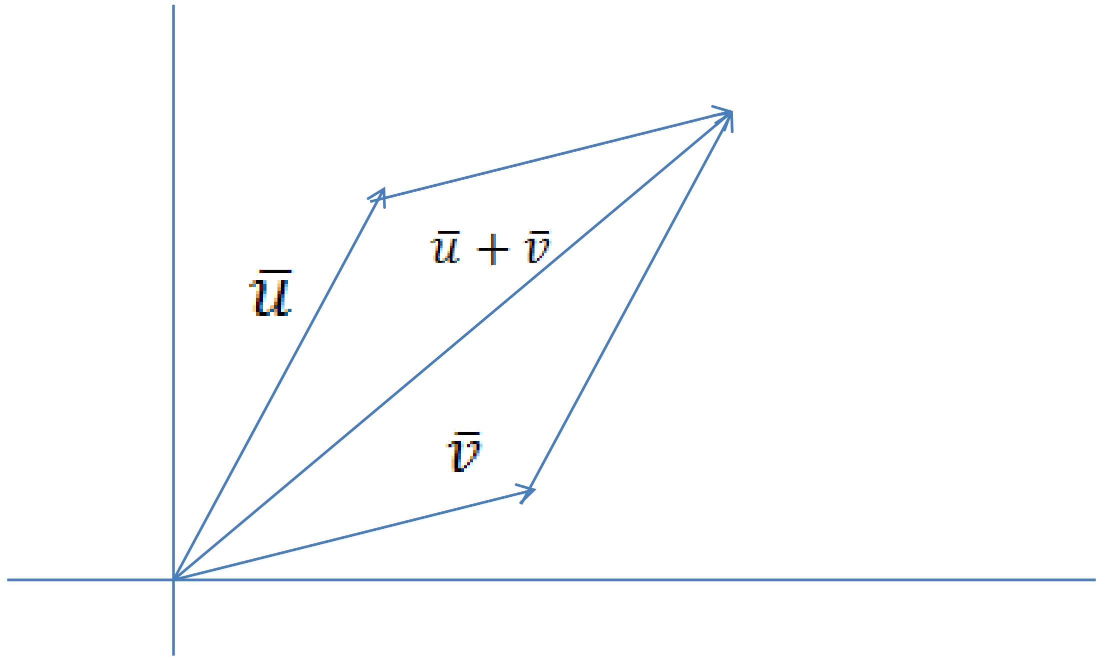
c) $\overrightarrow{EF} = (0{,}0{,}1{,}3)$ $E = (9{,}1,-1{,}2)$ $F =$

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES

A) SUMA DE VECTORES

DEFINICIÓN: Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, se define el vector suma $\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$

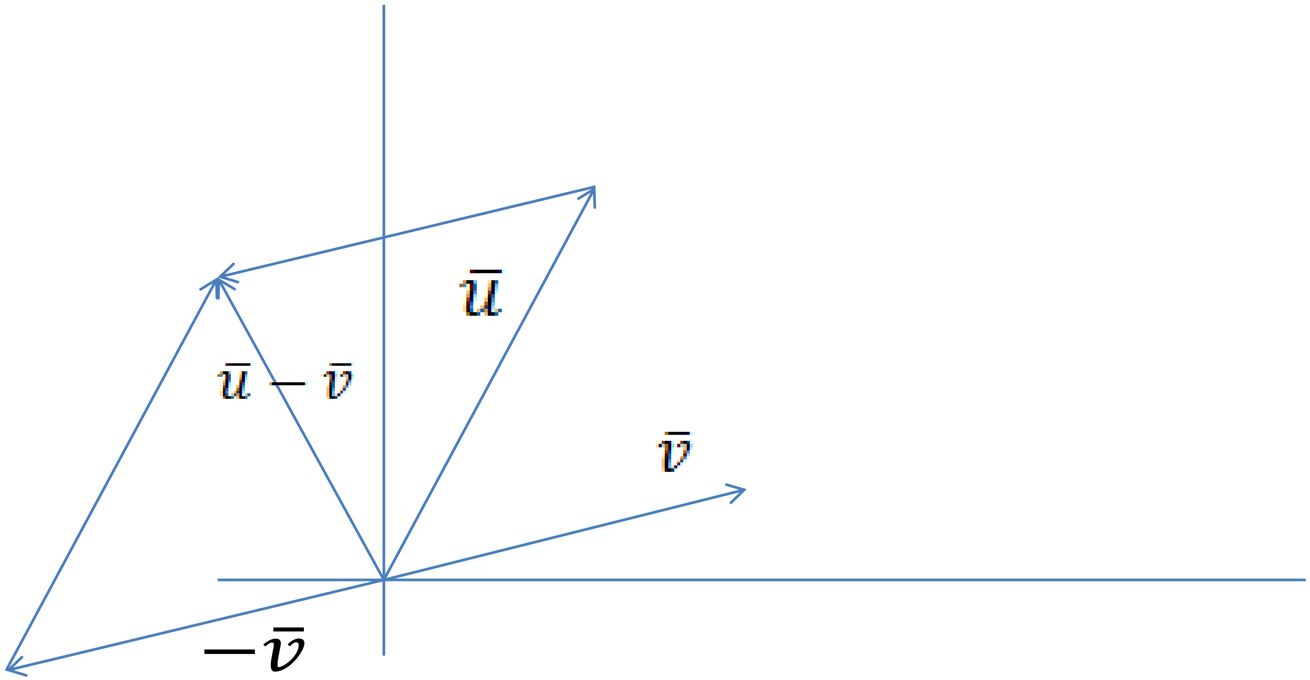


1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES

B) DIFERENCIA DE VECTORES

DEFINICIÓN: Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, se define el vector diferencia $\bar{u} - \bar{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)$

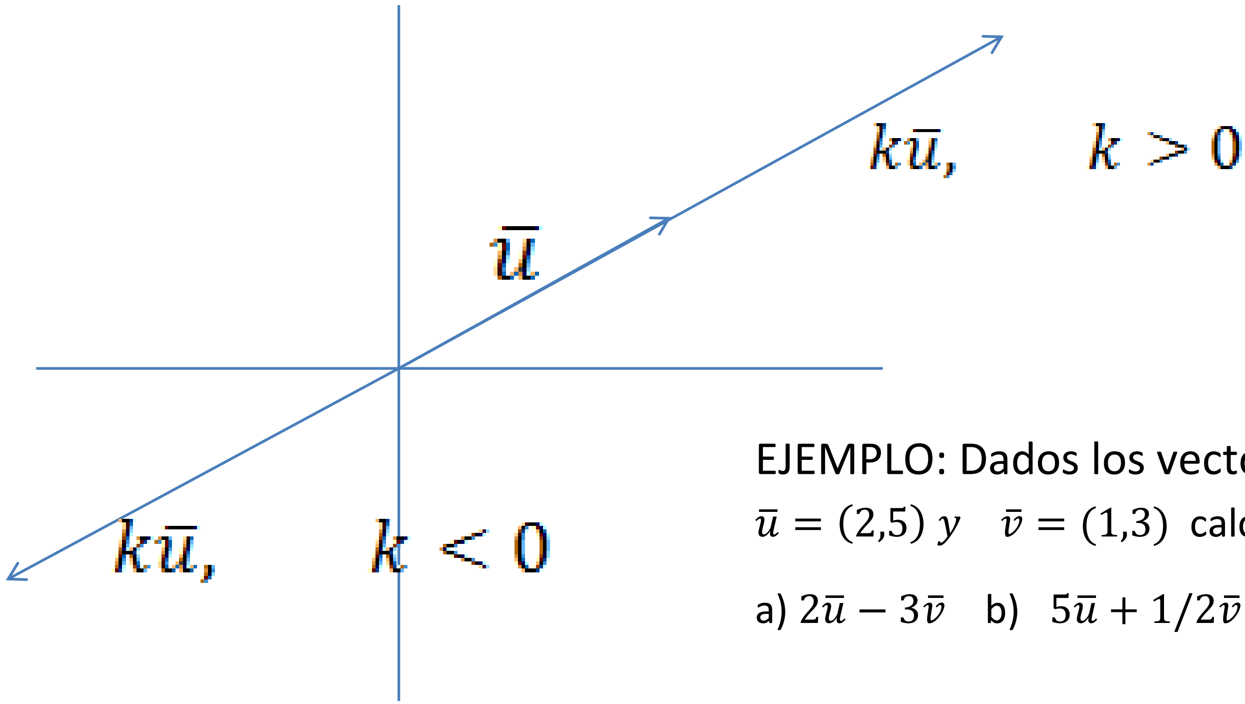


1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES

C) PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

DEFINICIÓN: Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y k un número real, se define el producto del escalar k por el vector $\bar{u}$, como $k\bar{u} = (ku_1, k\,u_2, \ldots, k\,u_n)$



EJEMPLO: Dados los vectores $\bar{u} = (2,5)\ y$ $\bar{v} = (1,3)$ calcula

a) $2\bar{u} - 3\bar{v}$ b) $5\bar{u} + 1/2\bar{v}$ c) $5\bar{u} - \bar{v}$

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES

D) PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES

Sean $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in R^n$ se verifican las siguientes propiedades:

1) CONMUTATIVA: $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

2) ASOCIATIVA: $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

3) EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO: Existe un vector de R^n llamado VECTOR NULO $\bar{0} = (0, \dots, 0)$ que verifica:

$$\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$$

4) TODO VECTOR TIENE OPUESTO.

Todo vector $\bar{u} \in R^n$ tiene un vector opuesto $\bar{v} = -\bar{u}$ tal que $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$

EJEMPLO: Comprobar:

1) (1,3)+(5,2)=(5,2)+(1,3)
2) ((1,4)+(3,5))+(0,-3)=(1,4)+((3,5)+(0,-3))
3) (3,2)+(0,0)=
4) (6,-7) +(-6,7)=

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES

E) PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE ESCALAR POR VECTOR

Sean $\bar{u}, \bar{v} \in R^n$ y sean $\alpha, \beta \in R$, se verifican las siguientes propiedades:

1) DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA DE VECTORES:

$$\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v}$$

2) DISTRIBUTIVA RESPECTO DE LA SUMA DE ESCALARES:

$$(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u}$$

3) PSEUDOASOCIATIVA $\alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\bar{u}$

4) EXISTENCIA ELEMENTO UNIDAD: $1\bar{u} = \bar{u}$

VECTORES + PROPIEDADES SUMA + PROPIEDADES PRODUCTO ESCALAR:

$(R^n, +, \cdot\, R)$

ESPACIO VECTORIAL

EJEMPLO: Comprobar:

1) 3((2,3)+(1,-2))=3(2,3)+3(1,-2)

2) (5+7) (1,2) = 5(1,2)+7(1,2)

3) 3(-7 (2,8))=(3(-7))(2,8)

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES

F) VECTORES UNITARIOS

DEFINICIÓN VECTOR UNITARIO:

Diremos que el vector $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ es unitario si su módulo es 1, es decir:

$|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = 1$

EJEMPLO: Dados los vectores (1,3,7), (1,0,0) y $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, determina los que sean unitarios.

CONSTRUCCIÓN DE VECTOR UNITARIO

Sea $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, si $|\bar{u}| = a$ entonces el vector:

$\frac{1}{a}\ \bar{u} = \left(\frac{u_1}{a}, \frac{u_2}{a}, \dots, \frac{u_n}{a}\right)$ es unitario

EJEMPLO: Dado el vector $\bar{u} =$(1,2,3) construye un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\bar{u}$

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES

G) PRODUCTO ESCALAR

Sean los vectores $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Se define el producto de escalar de dichos vectores como:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot cos\widehat{\bar{u}, \bar{v}}$$

O bien

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

EJEMPLOS:

1) Dados los vectores $\bar{u} = (3,6)$ y $\bar{v} = (2,7)$ calcula $\bar{u} \cdot \bar{v}$

2) Dados los vectores $\bar{u} = (1,5)$ y $\bar{v} = (1, \alpha)$ de R^2. Determinar el valor de α para que:

a) Sean perpendiculares b) Sean paralelos

c) Tengan el mismo módulo

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.2. OPERACIONES CON VECTORES : EJERCICIOS

1. Dados los vectores $\bar{u} = (3,1,6), \bar{v} = (2,1,-2)$, calcula:
   - a) $3\bar{u} - 5\bar{v}$ b) $\bar{u} \cdot \bar{v}$
   - c) $4\bar{w} - 6\bar{t}$ siendo $\bar{w} = -2\bar{u} + \bar{v}$ y $\bar{t} = \alpha \cdot \bar{u} - \bar{w}$ donde $\alpha = \bar{u} \cdot \bar{v}$
   - d) Módulo de $\bar{w}$ y $\bar{t}$

2. Dados los vectores $\bar{u} = (1,-2)$, $\bar{v} = (2,1)$ de R^2 se pide:
   - a) Calcular gráficamente el vector $2\bar{u} - \bar{v}$
   - b) Dibujar un vector unitario que tenga la misma dirección y sentido que $\bar{u}$
   - c) Dibujar un vector opuesto a $\bar{v}$

EJERCICIOS:
Libro: "Problemas y cuestiones de álgebra lineal", P. Ortega
Págs 22-25; ejercicios: 1,2,3,4,5,6

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.3. COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES.

A) CONCEPTO DE COMBINACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN: Sea el conjunto de vectores de R^n $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ y sea $\bar{w} \in R^n$. Diremos que $\bar{w}$ es una combinación lineal de los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ si existen números reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que

$$\bar{w} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{u}_n$$

EJEMPLOS

1) Determinar si el vector (8,20) es combinación lineal de (1,2) y (3,7)

2) Determinar si el vector (3,7,1) es combinación lineal de los vectores (1,2,7) y (2,5,0)

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.3. COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES.
B) CARACTERIZACIÓN DE CONJUNTOS LD/LI

Sea un conjunto de vectores de R^n $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$

a) Diremos que es un conjunto LINEALMENTE DEPENDIENTE (LD) $\Leftrightarrow$ existen números reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ NO TODOS NULOS tales que

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \, \bar{u}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{u}_n = \bar{0}$$

b) Diremos que es un conjunto LINEALMENTE INDEPENDIENTE (LI) $\Leftrightarrow$ de la ecuación vectorial

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \, \bar{u}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{u}_n = \bar{0}$$

se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ =0

EJEMPLO: Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son LI o LD utilizando la caracterización:

1) {(2,3),(1,5)} 2) {(2,6,1),(1,2,3),(0,2,-5)}

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.3. COMBINACION LINEAL DE VECTORES. LI/LD

D) PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS LI/LD

1) Un conjunto de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ es LI o LD nunca ambos a la vez.

2) Cualquier conjunto de vectores que contiene el vector nulo es LD

EJEMPLO: {(2,5),(3,7),(0,0)}

3) Los conjuntos de vectores formados por un único vector NO NULO son siempre LI

EJEMPLO: {(1,1,1,9)}

4) Si un conjunto M es LD, entonces cualquier conjunto M' que contenga a M ($M \subseteq M'$) es LD EJEMPLO: M={(1,2),(2,4)} M'={(1,2),(2,4),(7,1)}

5) Si un conjunto de vectores M es LI, entonces cualquier subconjunto suyo es LI EJEMPLO: {(3,7),(2,1)} es LI

1.1. DEFINICIÓN DE VECTOR. OPERACIONES ELEMENTALES

1.1.3. COMBINACION LINEAL DE VECTORES. LI/LD : EJERCICIOS

1. Escribir el vector (1,3) de R^2 como combinación lineal de los vectores de R^2:

   a) (1,1), (1,0) b) (3,1), (-1,1), (2,3)

2. Escribir si es posible el vector (1,-1,4) de R^3 como combinación lineal de los vectores de R^3:

   a) (1,1,2), (0,0,1) b) (2,-2,0), (-1,1,2) c) (1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)

EJERCICIOS:
Libro: “Problemas y cuestiones de álgebra lineal” P. Ortega
Págs. 46-49 ejercicios 22,23,24